

(2000 前)

数 学

(理 科 系)

(1～12 ページ)

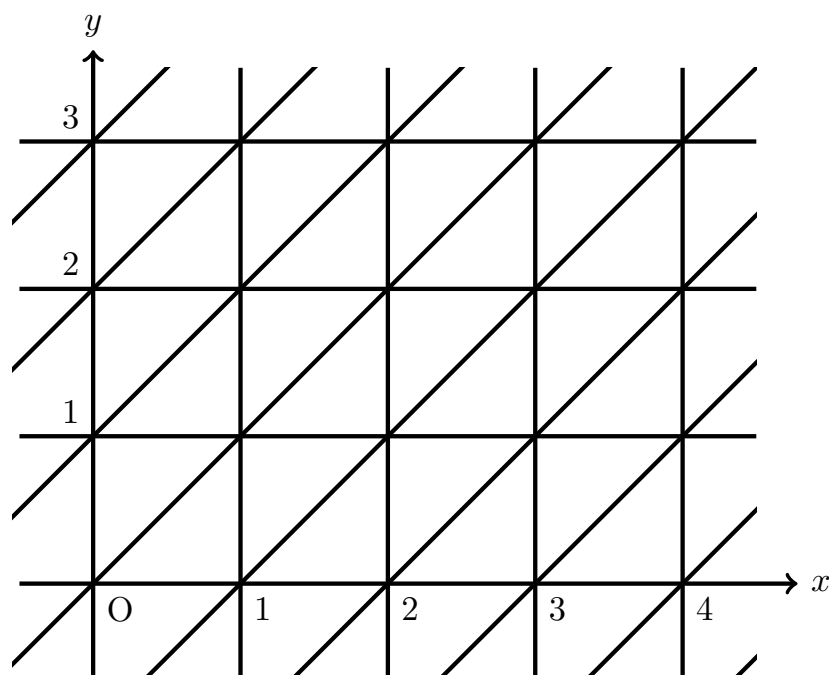
- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (理科系) 150 点

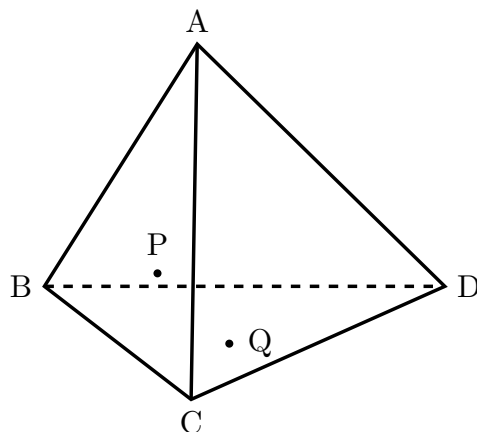
試験時間 120 分

1. xy 平面全体が下図のような直線の配列で埋められているとする.



このとき, 点 $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ と $P\left(m + \frac{2}{3}, n + \frac{1}{3}\right)$ について, A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ. ただし, m, n は負でない整数であるとする.
(配点 30 点)

2. 四面体 ABCD を考える.



面 ABC 上の点 P と面 BCD 上の点 Q について,

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD}$$

とおくとき, $x : y = s : t$ ならば, 線分 AQ と DP が交わることを示せ. (配点 30 点)

3. 二つの関数

$$f(x) = x(1 - x), \quad g(x) = \frac{2x}{2 + x}$$

を用いて、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$0 < a_0 = b_0 < \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad b_{n+1} = g(b_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．(配点 30 点)

- (1) $0 < x < \frac{1}{2}$ において、 $f(x)$ は単調増加であることを示せ．また $x > 0$ のとき、

$$f(x) < g(x) < x$$

であることを示せ．

- (2) $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $0 < a_n < b_n < \frac{1}{2}$ であることを示せ．
(3) b_n を求めよ．

4. 関数

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{6 - 2 \sin x}}$$

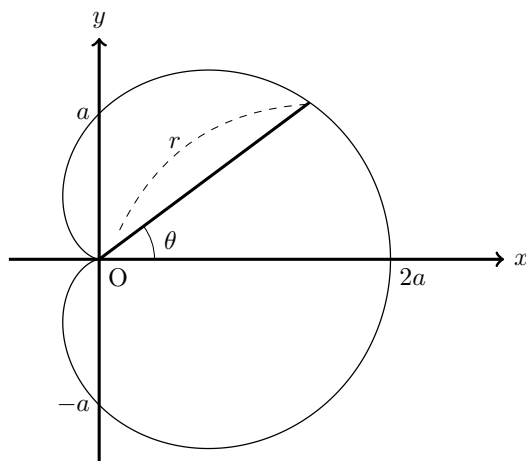
を考える． $0 \leq x \leq 2\pi$ とする． 次の問いに答えよ． (配点 30 点)

- (1) $f(x)$ の導関数を求めよ．
- (2) $f(x)$ の最小値を求めよ． またその最小値を与える x に対して， $\cos x$ の値を求めよ．
- (3) $y = f(x)$ のグラフの x 軸より下方にある部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

5. $a > 0$ を定数として、極方程式

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

により表される曲線 C_a を考える.



次の問いに答えよ. (配点 30 点)

- (1) 極座標が $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ の点を中心とし半径が $\frac{a}{2}$ である円 S を、極方程式で表せ.
- (2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $P \neq O$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ.
- (3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき、極座標が $(2a, 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ.

