

(2019 前)

数 学

(文 科 系)

(1～8 ページ)

- 白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学 (文科系) 75 点

試験時間 80 分

1. a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする. 2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

で定める. 曲線 $y = f(x)$ は点 $\left(2, 2 - \frac{c}{2}\right)$ を通り,

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{9}{2}$$

をみたすとする. 以下の問に答えよ. (配点 25 点)

- (1) 関数 $f(x)$ を a を用いて表せ.
- (2) 点 $(1, f(1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする. 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ.
- (3) $0 < a < \frac{1}{2}$ とする. (2) で求めた直線 ℓ の $y \geq 0$ の部分と曲線 $y = f(x)$ の $x \geq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と, そのときの a の値を求めよ.

2. 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする.

$$1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots$$

すなわち, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$ で, 4 以上の自然数 n に対し,
 $a_n = a_{n-3}$ とする. この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする.
以下の問に答えよ. (配点 25 点)

- (1) S_n を求めよ.
- (2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ.
- (3) どのような自然数 k に対しても, $S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ.

3. $|\overrightarrow{AB}| = 2$ をみたす $\triangle PAB$ を考え、辺 AB の中点を M 、 $\triangle PAB$ の重心を G とする。以下の問に答えよ。(配点 25 点)

- (1) $|\overrightarrow{PM}|^2$ を内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を用いて表せ。
- (2) $\angle AGB = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の値を求めよ。
- (3) 点 A と点 B を固定し、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき、 $\angle ABG$ の最大値を求めよ。ただし、 $0 < \angle ABG < \pi$ とする。

