2025年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 実数 $m > 1$ について，座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}\,(1,\ 0)$，$\mathrm{B}\,(m,\ 0)$，$\mathrm{C}\,(m^2,\ 0)$ をとる。点 $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ は $\mathrm{AP} : \mathrm{CP} = 1 : m$ を満たしながら動くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2) 次の等式を証明せよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = m(m+1)(m-x)$$

(3) $y \neq 0$ とする。点 $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ に対して $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$ 実数 $a > 0$ に対し，座標平面上の点 $\mathrm{P}\,(a,\ 0)$ をとる。曲線

$$y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad (x \geqq 0)$$

を C とする。点 Q が曲線 C 上を動くとき，PQ^2 の最小値を与える点 Q の x 座標を $F(a)$ とし，PQ^2 の最小値を $G(a)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $F(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{F(a) - a}{a^2}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{G(a)}{a^3}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上の $0 \leqq x \leqq 2\log 2$ の範囲において，曲線 $y = e^x$ と曲線 $y = 2 - e^{2x}$，直線 $x = 2\log 2$ で囲まれた図形を D とする。図形 D を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の式によって与えられる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{x_n\}$ がある。

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad x_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{b_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ。

(2) $x_n = \dfrac{1}{2}(a_n^2 + b_n)$ を示せ。

(3) $\dfrac{x_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ。