2024年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ と $g(x) = e^{-x}\cos x$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ を求めよ。

(2) 整数 k に対し，定積分 $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ を求めよ。

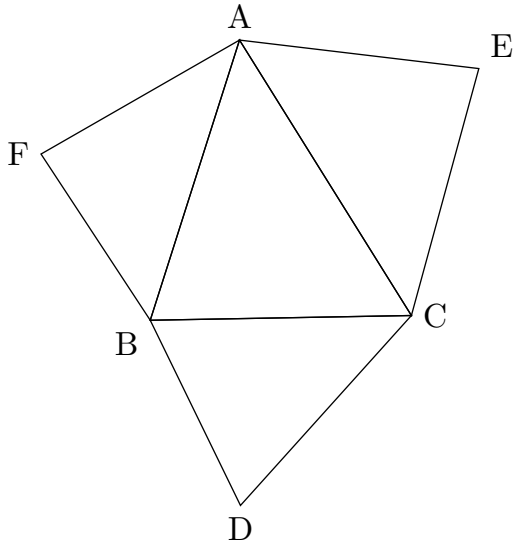
$\boxed{2}$ 虚数単位を i とし，複素数 α を，$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ とする。また，実数 u，v に対し，複素数 w，z を，$w = u + vi$，$z = \alpha w$ とする。次の問いに答えよ。

(1) z の実部と虚部，および $|z|$ を，それぞれ u と v を用いて表せ。

(2) $u+\sqrt{3}v-1=0$ のとき，実数 s, t を $s+ti=z^2$ で定める。$t^2 = s+\dfrac{1}{4}$ であることを示せ。

(3) $u+\sqrt{3}v-1=0$ のとき，実数 a，b を $a+bi=w^2$ で定める。xy 平面において，点 $\mathrm{P}\,(a,\ b)$ と直線 $x-\sqrt{3}y+1=0$ の距離は，P と原点の距離に等しいことを示せ。

$\boxed{3}$ 次の図は, ある四面体 T の展開図である。ここで, $\mathrm{AB}=\sqrt{10}$, $\mathrm{AC}=\sqrt{13}$, $\mathrm{BF}=\sqrt{5}$, $\mathrm{AF}=\sqrt{7}$, および $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ である。このとき, 三角形 ABC の面積および四面体 T の体積を求めよ。



$\boxed{4}$ n を自然数とする。3 辺の長さが $\sqrt{a_n}$, $\sqrt{a_{n+1}}$, $\sqrt{a_{n+1}}$ である二等辺三角形の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ となる数列 $\{a_n\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 3 辺の長さが $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$ である二等辺三角形の面積を求めよ。

(2) 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$ を示せ。また, $a_{n+1}\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であることを示せ。

(3) 等式 $a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-3}{4a_n}(a_n-1)$ を示せ。

(4) $|a_1-1|\leqq\dfrac{1}{4}$ とする。このとき, すべての n について,

$$|a_{n+1}-1|\leqq\frac{3}{4}|a_n-1|$$

が成り立つことを示し, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。