

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2023 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

第 1 問

関数 $F(x) = \sin x - \log(1+x)$ と $f(x) = F'(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $f'(\alpha) = 0$ となる α が開区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。
- (2) $f(\beta) = 0$ となる β が開区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。
- (3) 開区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ において、 $F(x) > 0$ であることを示せ。ただし、自然対数の底 e が $e > 2.7$ を満たすことを用いてもよい。
- (4) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において、曲線 $y = \sin x$ 、曲線 $y = \log(1+x)$ 、および直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

第 2 問

座標空間において、平面 $z = 2$ 上の点 P と、平面 $z = 1$ 上の円板

$$B : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 1$$

を考える。点 Q は平面 $z = 0$ (xy 平面) 上にあるとし、与えられた P に対して、線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

- (1) P の座標が $(0, 0, 2)$ であるとき、 D を xy 平面上に図示せよ。
- (2) r を正の定数とする。 P の座標が $(r, 0, 2)$ であるとき、 D を xy 平面上に図示せよ。
- (3) $r > 2$ を満たす定数 r に対して、平面 $z = 2$ 上の円

$$C : x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 2$$

を考える。 P が C 上を動くとき、 D が通過する部分の面積を求めよ。

第 3 問

K を自然数とする。2 つの箱 A と B があり, A に赤玉 1 個, B に白玉 K 個が入っている。A の中の 1 個の玉と B の中の 1 個の玉の交換を繰り返し行う。 n 回目の交換が終わったときに A の中の玉が赤玉である確率を求めよ。

第 4 問

複素数 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ と自然数 L をとる。次の問いに答えよ。

- (1) k, m が整数ならば, $|k + m\omega|^2$ も整数であることを示せ。
- (2) $|k| \leq L$ を満たす整数 k に対して, $|k + \omega|$ の最大値を求めよ。
- (3) 整数 k, m が $|k| \leq L, |m| \leq L, |k - m| \leq L$ を満たすとき, $|k + m\omega| \leq L$ を示せ。
- (4) $|k + m\omega| \leq L$ を満たす整数の組 (k, m) の個数を N とする。不等式 $N \geq 3L^2 + 3L + 1$ を示せ。