2023年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 関数 $F(x) = \sin x - \log(1+x)$ と $f(x) = F'(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $f'(\alpha) = 0$ となる α が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(2) $f(\beta) = 0$ となる β が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(3) 開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，$F(x) > 0$ であることを示せ。ただし，自然対数の底 e が $e > 2.7$ を満たすことを用いてもよい。

(4) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y = \sin x$，曲線 $y = \log(1+x)$，および直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標空間において，平面 $z = 2$ 上の点 P と，平面 $z = 1$ 上の円板

$$B : x^2 + y^2 \leqq 1, \quad z = 1$$

を考える。点 Q は平面 $z = 0$（xy 平面）上にあるとし，与えられた P に対して，線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

(1) P の座標が $(0,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(2) r を正の定数とする。P の座標が $(r,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(3) $r > 2$ を満たす定数 r に対して，平面 $z = 2$ 上の円

$$C : x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 2$$

を考える。P が C 上を動くとき，D が通過する部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ K を自然数とする。2 つの箱 A と B があり，A に赤玉 1 個，B に白玉 K 個が入っている。A の中の 1 個の玉と B の中の 1 個の玉の交換を繰り返し行う。n 回目の交換が終わったときに A の中の玉が赤玉である確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 複素数 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ と自然数 L をとる。次の問いに答えよ。

(1) k，m が整数ならば，$|k+m\omega|^2$ も整数であることを示せ。

(2) $|k| \leqq L$ を満たす整数 k に対して，$|k+\omega|$ の最大値を求めよ。

(3) 整数 k，m が $|k| \leqq L$，$|m| \leqq L$，$|k-m| \leqq L$ を満たすとき，$|k+m\omega| \leqq L$ を示せ。

(4) $|k+m\omega| \leqq L$ を満たす整数の組 $(k,\ m)$ の個数を N とする。不等式 $N \geqq 3L^2+3L+1$ を示せ。