

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：120分

問題数：4問

第 1 問

方程式 $z^4 + 4 = 0$ について、次の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) 複素数 -4 を極形式で表し、 $z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数をすべて求めよ。
- (2) $|w|^2 = 3$ を満たす複素数 w と、 $z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数 α について、

$$|\alpha + iw|^2 + |\alpha - iw|^2$$

を求めよ。

- (3) t を実数とする。複素数平面における円 $|z - t - 5i| = 5$ の内部（ただし、境界線を含まない）に、 $z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数がちょうど 1 つ含まれるように、 t の範囲を定めよ。

第 2 問

k を正の実数とし, $x > 0$ で定義された関数 $y = k(\log x)^2$ のグラフを C とする。 y 軸上に点 $A \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}e \right)$ をとる。ただし, e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $(p, k(\log p)^2)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 点 A を通って, C にちょうど 2 本の接線が引けることを示せ。
- (3) 点 A を通る C の 2 本の接線が垂直に交わるような k の値を求めよ。さらに, それぞれの接点の x 座標 p, q を求めよ。ただし, $p < q$ とする。
- (4) (3) で求めた k, p, q に対し, 定積分

$$\int_p^q k(\log x)^2 dx$$

を求めよ。

第 3 問

実数 p, q を係数とする 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が、実数解 α, β をもち、 $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$ を満たすとする。ただし、 $\alpha \leq \beta$ とする。このとき、

$$M = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)}$$

を q の式で表し、 M のとりうる最大値および最小値と、そのときの α, β の値を求めよ。

第 4 問

自然数 n の正の約数全体の集合を A_n とし, A_n のすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。例えば,

$$A_3 = \{1, 3\}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{3^2}, \quad A_4 = \{1, 2, 4\}, \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}$$

である。 p と q は異なる素数とし, k と l は自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) s_8, s_{12} の値を求めよ。
- (2) $n = p^k$ について, A_n の要素の個数を求めよ。
- (3) $n = p^k q^l$ について, $s_n < \frac{3}{2}$ を示せ。