2021年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，初項 $a_1 = -1$，$b_1 = 2$ と漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = a_n + 5b_n \end{cases}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ が漸化式 $c_{n+1} = 3c_n$ を満たすことを示せ。

(2) $d_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，数列 $\{d_n\}$ が満たす漸化式を導き，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{2}$ n を 2 以上の自然数とし，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{\log x}{x^n} \quad (x > 1)$$

と定める。$y = f_n(x)$ で表される曲線を C とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $x > 1$ のとき，$\log x < x - 1$ を示せ。また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ を示せ。

(2) 関数 $f_n(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) 曲線 C の変曲点を求めよ。また，その変曲点における接線と y 軸との交点を $(0,\ y_n)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 底面の半径が 1 で高さが 1 である直円柱を考える。直円柱の底面の直径を含みこの底面と 30° の傾きをなす平面により，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ n を 2 以上の自然数とし，点 O を中心とする半径 1 の円周上にすべての頂点をもつ正 $2n$ 角形を考える。そのうちの 1 つの頂点を A とし，A とそれ以外の頂点を結ぶ線分が点 O を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円と共有点をもつような頂点の個数を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。

(2) a_{2021} を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$ を示せ。