

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2020 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

第 1 問

1 個のサイコロを 3 回投げ、出た目を順に a, b, c とする。座標平面上に 3 点 $A(a, 1)$, $B(-b, 0)$, $C(c, 0)$ を定め、それらを頂点とする $\triangle ABC$ を考える。ただし、サイコロは 1 から 6 までの目が同じ確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積の値が整数となる確率を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ が直角三角形となる確率を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が二等辺三角形となる確率を求めよ。

第 2 問

実数 k と複素数 z (ただし $z \neq -1$) に対して, $w = \frac{z+k}{z+1}$ とする。また, i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

- (1) $k = 0$ とする。 $z = 0$ に対する w の値を α , $z = 1$ に対する w の値を β , $z = \sqrt{3}i$ に対する w の値を γ とする。複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, $\angle BAC$ の大きさを求めよ。
- (2) $k = -1$ とする。点 z が複素数平面の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき, 点 w の描く図形を求めよ。
- (3) $k \neq 1$ とする。複素数平面において, 点 z が虚軸上を動くとき, 点 w の描く図形を F とする。 F が半径 $\frac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ。

第 3 問

平面上に2つの定点 O と U があり、 $OU = 3$ を満たしている。点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 $\triangle STU$ があり、辺 ST の中点が線分 OU 上にあるものとする。

$\triangle STU$ の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線を引き、それらの接点をそれぞれ A, B とする。 $\triangle OAB$ を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積を V とする。点 P が $\triangle STU$ の内部および周上を動くとき、 V の最大値と最小値を求めよ。また、 V の最大値、最小値をとるような点 P の存在範囲をそれぞれ $\triangle STU$ の内部および周上に図示せよ。

第 4 問

$-2\pi \leq x \leq \pi$ のとき, 関数

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3} \right) + \frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$$

を考える。次の問いに答えよ。必要であれば, $\pi^2 < 10$ を用いてよい。

- (1) $f(x)$ は閉区間 $[-2\pi, \pi]$ で増加することを示せ。
- (2) 开区間 $(-2\pi, \pi)$ で, つねに $f(x) > x$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について, 定積分 $\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x) dx$ の値を求めよ。
- (4) $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について, 2つの曲線

$$\begin{aligned} C_1 : y &= f(x) & (0 \leq x \leq \pi) \\ C_2 : y &= f^{-1}(x) & (f(0) \leq x \leq f(\pi)) \end{aligned}$$

を考える。 C_1 , C_2 および直線 $x + y = f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。