2020年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 1個のサイコロを3回投げ，出た目を順に a，b，c とする。座標平面上に3点 $\mathrm{A}\,(a,\ 1)$，$\mathrm{B}\,(-b,\ 0)$，$\mathrm{C}\,(c,\ 0)$ を定め，それらを頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える。ただし，サイコロは1から6までの目が同じ確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の値が整数となる確率を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形となる確率を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 実数 k と複素数 z（ただし $z \neq -1$）に対して，$w = \dfrac{z+k}{z+1}$ とする。また，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $k = 0$ とする。$z = 0$ に対する w の値を α，$z = 1$ に対する w の値を β，$z = \sqrt{3}\,i$ に対する w の値を γ とする。複素数平面上の3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。

(2) $k = -1$ とする。点 z が複素数平面の原点Oを中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(3) $k \neq 1$ とする。複素数平面において，点 z が虚軸上を動くとき，点 w の描く図形を F とする。F が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 平面上に2つの定点OとUがあり，$\mathrm{OU}=3$ を満たしている。点Oを中心とする半径1の円 C と1辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 $\triangle\mathrm{STU}$ があり，辺STの中点が線分OU上にあるものとする。

$\triangle\mathrm{STU}$ の内部または周上の点Pから円 C へ異なる2本の接線を引き，それらの接点をそれぞれA，Bとする。$\triangle\mathrm{OAB}$ を直線OPのまわりに1回転してできる円すいの体積を V とする。点Pが $\triangle\mathrm{STU}$ の内部および周上を動くとき，V の最大値と最小値を求めよ。また，V の最大値，最小値をとるような点Pの存在範囲をそれぞれ $\triangle\mathrm{STU}$ の内部および周上に図示せよ。

$\boxed{4}$ $-2\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数

$$f(x)=\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}\right)+\frac{(3-2\sqrt{2}\,)\pi}{3}$$

を考える。次の問いに答えよ。必要であれば，$\pi^2<10$ を用いてよい。

(1) $f(x)$ は閉区間 $[-2\pi,\,\pi]$ で増加することを示せ。

(2) 開区間 $(-2\pi,\,\pi)$ で，つねに $f(x)>x$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，定積分 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x)\,dx$ の値を求めよ。

(4) $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，2つの曲線

$$C_1 : y=f(x) \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$
$$C_2 : y=f^{-1}(x) \quad (f(0) \leqq x \leqq f(\pi))$$

を考える。C_1，C_2 および直線 $x+y=f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。