

2019 年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

数 学

理系学部

(注 意)

- 1 問題紙は指示があるまで開かないこと。
- 2 答案用紙は 4 枚である。
- 3 答えは、各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。
- 4 答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。
- 5 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1 k を正の定数とする。2 次方程式 $z^2 - 2kz + 1 = 0$ が虚数解をもつとし、虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

- (1) k の値の範囲を求めよ。また、 $|\alpha|$ を求めよ。
- (2) $\cos \frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。
- (3) 複素数平面において、 α^3 が第 3 象限にあり、かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と k の値の範囲を求めよ。ただし、座標軸の点は、どの象限にも属さない。
- (4) (3) において求めた範囲に α があるとき、 $|1 - \alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。

2 座標平面に 2 曲線 $C_1 : y = \sqrt{x} - 4$ ($x > 0$) と $C_2 : y = -\sqrt{1-x}$ ($x < 1$) がある。次の問いに答えよ。

- (1) C_1 は区間 $x > 0$ で上に凸であることを示せ。
- (2) 点 $F\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ に関して、点 P と対称な点を Q とする。点 P が C_1 上を動くとき、点 Q の軌跡が C_2 であることを示せ。
- (3) C_1 上の点 A における法線 ℓ が点 F を通るとし、 ℓ と C_2 の共有点を B とする。このとき、 A の座標 (x_1, y_1) および B の座標 (x_2, y_2) をそれぞれ求めよ。
- (4) C_1 上に点 X_1 、 C_2 上に点 X_2 をとる。線分 X_1X_2 の長さの最小値を求めよ。

3 座標平面において,

$$x = \sin t, \quad y = \cos t - \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

で表される曲線を C_1 とし, x 軸に関して C_1 と対称な曲線を C_2 とする。 C_1 で囲まれる図形と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S を求めよ。

4 p を 2 より大きい素数, n を正の整数とする。 $1 \leq k \leq p^n$ を満たす整数 k で, p と互いに素であるもの全体の集合を A とする。次の問いに答えよ。

- (1) $p = 3, n = 2$ のとき, 集合 A を求めよ。
- (2) A に属する整数の個数, および A に属するすべての整数の和を求めよ。
- (3) A に属する整数 k に対して, $k\ell - 1$ が p^n の倍数となるような A に属する整数 ℓ が存在し, それはただ一つであることを示せ。ただし, 整数 a と b が互いに素であるとき, 1 次不定方程式 $ax + by = 1$ は, 整数解をもつことが知られている。必要ならばこの事実を利用してよい。
- (4) A に属するすべての整数 k についての $\frac{1}{k}$ の和を既約分数で表したとき, 分子は p^n の倍数となることを示せ。

