2017年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) $z^6 + 27 = 0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

(2) (1) で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に $z_1,\ z_2,\ \cdots$ とするとき，z_1，z_2 と積 $z_1 z_2$ を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。

$\boxed{2}$ 座標平面上の放物線 $y = x^2$ 上に点 $\mathrm{P}\,(t,\ t^2)\ (t > 0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0 < a \leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}\,(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}\,(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1) で求めた点 $\mathrm{Q}\,(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}\,(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。

$\boxed{3}$ $0 < a < 3$ とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で 2 つの関数

$$f(x) = 3 - a\sin x, \quad g(x) = 2\cos^2 x$$

を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x) \geqq g(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ が，ちょうど 2 つの共有点をもつとき，共有点の x 座標 x_1，x_2 $(x_1 < x_2)$ と a の値を求めよ。また，そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ。

(3) (2) のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_n > \sqrt{7}$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{7}}{a_n + \sqrt{7}} \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定めるとき，$b_{n+1} = b_n^2$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\log\left(a_n - \sqrt{7}\right)$ を求めよ。