

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2015 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

第 1 問

四面体 $OABC$ において、3つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ はどの2つも互いに垂直であり、 $h > 0$ に対して、

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, \quad |\overrightarrow{OB}| = 2, \quad |\overrightarrow{OC}| = h$$

とする。3点 O , A , B を通る平面上の点 P は、 $\overrightarrow{CP}$ が $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ とするとき、 α と β を h を用いて表せ。
- (2) 直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。
- (3) $\triangle PAB$ は、辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。

第 2 問

関数 $f(x) = xe^x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ について、増減および凹凸を調べ、そのグラフをかけ。ただし、必要ならば $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ を用いてもよい。
- (2) 不定積分 $\int xe^x dx$, $\int x^2 e^{2x} dx$ をそれぞれ求めよ。
- (3) $0 \leq t \leq 1$ に対し $g(x) = f(x) - f(t)$ とおく。 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、曲線 $y = g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。 $V(t)$ を求めよ。
- (4) (3) の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と、 $f(a)$ の値を求めよ。ただし、 a の値を求める必要はない。

第 3 問

関数 $y = \log_3 x$ とその逆関数 $y = 3^x$ のグラフが、直線 $y = -x + s$ と交わる点をそれぞれ $P(t, \log_3 t)$, $Q(u, 3^u)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 PQ の中点の座標は $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ であることを示せ。
- (2) s, t, u は $s = t + u$, $u = \log_3 t$ を満たすことを示せ。
- (3) $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{su - k}{t - 3}$ が有限な値となるように、定数 k の値を定め、その極限値を求めよ。

第 4 問

$a > 1$ とする。無限等比級数

$$a + ax(1 - ax) + ax^2(1 - ax)^2 + ax^3(1 - ax)^3 + \cdots$$

が収束するとき、その和を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また、そのときの $S(x)$ を求めよ。
- (2) x が (1) で求めた範囲を動くとき、 $S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $I(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} S(x) dx$ とおくとき、極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ を求めよ。