2015年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 四面体 OABC において，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はどの 2 つも互いに垂直であり，$h > 0$ に対して，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = h$$

とする。3 点 O，A，B を通る平面上の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，α と β を h を用いて表せ。

(2) 直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。

(3) △PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = xe^x$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ を用いてもよい。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int xe^x\,dx$，$\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ に対し $g(x) = f(x) - f(t)$ とおく。$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(4) (3) の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ。ただし，a の値を求める必要はない。

$\boxed{3}$ 関数 $y = \log_3 x$ とその逆関数 $y = 3^x$ のグラフが，直線 $y = -x + s$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{P}\,(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}\,(u,\ 3^u)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点の座標は $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$ であることを示せ。

(2) s，t，u は $s = t + u$，$u = \log_3 t$ を満たすことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{t \to 3} \frac{su - k}{t - 3}$ が有限な値となるように，定数 k の値を定め，その極限値を求めよ。

$\boxed{4}$ $a > 1$ とする。無限等比級数

$$a + ax(1 - ax) + ax^2(1 - ax)^2 + ax^3(1 - ax)^3 + \cdots$$

が収束するとき，その和を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの $S(x)$ を求めよ。

(2) x が (1) で求めた範囲を動くとき，$S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $I(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} S(x)\,dx$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a \to \infty} I(a)$ を求めよ。