2014年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ a を実数とする。このとき，座標空間内の球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と直線 $\ell : (x,\ y,\ z) = (2,\ -1,\ 0) + t\,(-1,\ a,\ a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) S と ℓ が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a の値が (1) で求めた範囲にあるとき，S と ℓ の 2 つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ。

(3) (2) の d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1) C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2) (1) で求めた P の x 座標を b とするとき，

$$\tan\theta = e^b$$

をみたす $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3) 上の b に対する直線 $x = b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 行列

$$P = \begin{pmatrix} x & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $P^2 = P$ をみたす実数の組 $(x,\ y)$ は 2 組ある。これらを求めよ。

(2) (1) で求めた 2 つの組を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とし，それぞれに対応する行列 P を P_1，P_2 とおく。ただし，$x_1 < x_2$ とする。このとき，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対し

$$(P_1P_2)^nP_1 = r_nP_1$$

をみたす実数 r_n を求めよ。

(3) 重複を許して P_1，P_2 を 6 個並べて得られる順列

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6$$

のうちで $Q_1 = P_1$ となるものすべてを考え，それぞれの順列に 6 個の行列の積 $P_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ を対応させる。このようにして得られる行列のうち，異なるものはいくつあるか。

$\boxed{4}$ 自然数が 1 つずつ書かれている玉が，

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1) 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2) 自然数 n に対し，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3) 1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。