2013年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 正の実数 a，b，c に対して，O を原点とする座標空間に 3 点 A $(a,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ b,\ 0)$，C $(0,\ 0,\ c)$ がある。AC $= 2$，BC $= 3$ かつ △ABC の面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\angle\mathrm{ACB}$ の値を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。

(2) a，b，c の値を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。また，原点 O から △ABC に下ろした垂線の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \frac{2}{3}\sin 3\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$$

とおく。$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\dfrac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値，最小値を与える θ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ $a > 0$ とする。$x \geqq 0$ における関数 $f(x) = e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C : y = f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。また，P を通り ℓ に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)\,dx$ を $t = \sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。

(3) 曲線 C，直線 $y = 1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$a > 0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 実数 x，y，u，v が，$xA + yE = uA + vE$ を満たすならば，$x = u$，$y = v$ であることを示せ。

(2) $A = a_1A + b_1E$，$A^2 = a_2A + b_2E$ となる実数 a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$A^n = a_nA + b_nE$ となる実数 a_n，b_n を n を用いて表せ。

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，実数 c_n，d_n が

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n = c_nA + d_nE$$

を満たしているとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n}$ を求めよ。