

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2012年

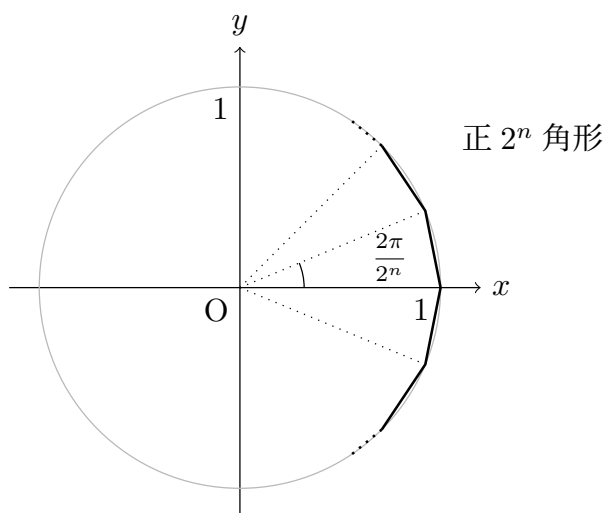
試験時間：120分

問題数：4問

第 1 問

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 ($n \geq 2$) の面積を S_n , 周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) $S_n = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$, $L_n = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$ を示せ。
- (2) $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \cos \frac{\pi}{2^n}$, $\frac{S_n}{L_n} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2^n}$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{S_2}{L_2} \frac{S_3}{L_3} \cdots \frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。



第 2 問

直線 $\ell : (x, y, z) = (5, 0, 0) + s(1, -1, 0)$ 上に点 P_0 , 直線 $m : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, 0, 2)$ 上に点 Q_0 があり, $\overrightarrow{P_0Q_0}$ はベクトル $(1, -1, 0)$ と $(1, 0, 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

- (1) P_0, Q_0 の座標を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{P_0Q_0}|$ を求めよ。
- (3) 直線 ℓ 上の点 P , 直線 m 上の点 Q について, $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{P_0Q_0}, \overrightarrow{Q_0Q}$ で表せ。
また, $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{Q_0Q}|^2 + 16$ であることを示せ。

第 3 問

次の問いに答えよ。

- (1) $f(t)$ を $0 \leq t \leq 1$ で連続な関数とする。 $\tan x = t$ において,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 f(t) dt$$

であることを示せ。

- (2) (1) を用いて, 0 以上の整数 n に対し, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx$ の値を求めよ。また,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \leq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

- (3) 0 以上の整数 n と $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ を満たす x に対し,

$$\frac{1 - \tan^2 x + \tan^4 x - \cdots + (-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1 - (-1)^{n+1} \tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ。

- (4) (2) と (3) を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。

第 4 問

$n \geq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回, しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_3, p_4 を求めよ。

(2) p_n を求め,

$$p_{n+1} - \frac{5}{6}p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

であることを示せ。

(3) $s_n = p_3 + p_4 + \cdots + p_n$ として, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ を求めよ。ただし, 必要ならば, $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることは使ってよい。