2012年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

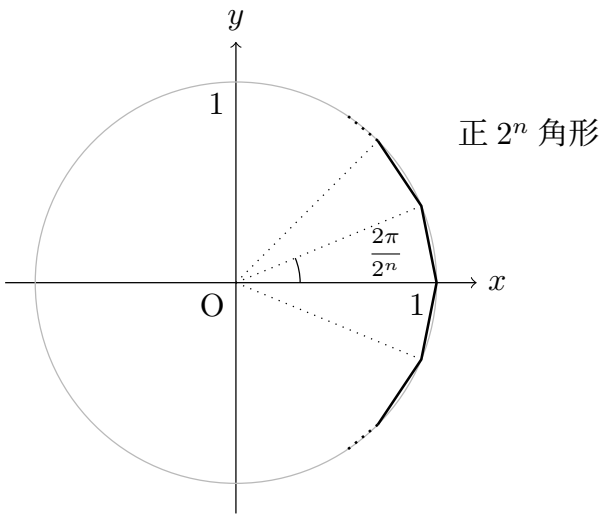
$\boxed{1}$ 半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。



$\boxed{2}$ 直線 ℓ : $(x,\ y,\ z) = (5,\ 0,\ 0) + s(1,\ -1,\ 0)$ 上に点 $\mathrm{P_0}$，直線 m : $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 2) + t(1,\ 0,\ 2)$ 上に点 $\mathrm{Q_0}$ があり，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ と $(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ の座標を求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}\right|$ を求めよ。

(3) 直線 ℓ 上の点 P，直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}} + \overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}\right|^2 + 16$ であることを示せ。

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x = t$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$$

であることを示せ。

(2) (1) を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ。
また，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ。

(4) (2) と (3) を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ $n \geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回，しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_3，p_4 を求めよ。

(2) p_n を求め，

$$p_{n+1} - \frac{5}{6}p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

であることを示せ。

(3) $s_n = p_3 + p_4 + \cdots + p_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。ただし，必要ならば，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることは使ってよい。