

2011 年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

数 学

理系学部

(注 意)

- 1 問題紙は指示があるまで開かないこと。
- 2 答案用紙は 4 枚である。
- 3 答えは、各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。
- 4 答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。
- 5 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1 座標平面上に点 $A(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $C(\cos\theta, -\sin\theta)$ がある。
ただし, $0 < \theta < \pi$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AC と x 軸の交点を P とする。 P の座標を θ で表せ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積 $S(\theta)$ を求めよ。
- (3) 面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $B = P^{-1}AP$ とおく。
また, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, a_n, b_n を

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) P^{-1} および B を求めよ。
- (2) a_n, b_n を求めよ。
- (3) 実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。このとき

$$\left[(2 + \sqrt{3})^n \right] = a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を示せ。また

$$c_n = (2 + \sqrt{3})^n - \left[(2 + \sqrt{3})^n \right]$$

とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ の値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $1 - \cos \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{8}$ を示せ。

(2) $I_n = \int_0^2 x^n e^x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。 I_1 の値を求めよ。さらに, 等式 $I_n = 2^n e^2 - n I_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を示せ。

(3) I_2, I_3, I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4) 不等式 $\int_0^4 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) e^{\sqrt{x}} dx \leq -2e^2 + 30$ を示せ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して, $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ を求めよ。また

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

を示せ。

(2) 2 以上の自然数 n に対して

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$$

を示せ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{e e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \dots e^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{e} \log(n+1)$$

を示せ。

