

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2010 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

第 1 問

座標平面において、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ ($0 < b < 1$) における接線を ℓ とし、 ℓ と x 軸の交点を Q とする。点 $R(4, 0)$ と ℓ の距離が 2 であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標 (a, b) を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

第 2 問

座標空間において、中心が $A(0, 0, a)$ ($a > 0$) で半径が r の球面

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2$$

は、点 $B(\sqrt{5}, \sqrt{5}, a)$ と点 $(1, 0, -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

- (1) r と a の値を求めよ。
- (2) 点 $P(\cos t, \sin t, -1)$ について、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ を求めよ。
- (3) $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表せ。また、 t が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を動くとき、 S の最小値と、そのときの t の値を求めよ。

第 3 問

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{pmatrix}$ ($r > 0$) と座標平面上の点 $P_0(-1, 2)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$ は, 式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

- (1) A^{2k}, A^{2k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。
- (2) x_n, y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。
- (3) 線分 $P_{n-1}P_n$ の長さを d_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。数列 $\{d_n\}$ の初項 d_1 と一般項 d_n を求めよ。また, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ が収束し, その和が 3 となるような r の値を求めよ。

第 4 問

a ($a > 0$) を定数とし, $f(x) = 2a \log x - (\log x)^2$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフは, x 軸と点 $P_1(x_1, 0)$, $P_2(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$) で交わっている。次の問いに答えよ。

- (1) x_1, x_2 の値を求めよ。また, $y = f(x)$ の最大値と, そのときの x の値を求めよ。
- (2) 点 P_1, P_2 における $y = f(x)$ の接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき, $\lim_{a \rightarrow \infty} X(a)$ を求めよ。
- (3) $a = 1$ とするとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。