2010年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 座標平面において，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\,(a,\ b)\ (0<b<1)$ における接線を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}\,(4,\ 0)$ と ℓ の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標空間において，中心が $\mathrm{A}\,(0,\ 0,\ a)\ (a>0)$ で半径が r の球面

$$x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$$

は，点 $\mathrm{B}\left(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a\right)$ と点 $(1,\ 0,\ -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

(1) r と a の値を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}\,(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ について，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積 S を t を用いて表せ。また，t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，S の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{pmatrix}$ $(r > 0)$ と座標平面上の点 $\mathrm{P}_0\,(-1,\ 2)$, $\mathrm{P}_1\,(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}_2\,(x_2,\ y_2)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_n\,(x_n,\ y_n)$, $\cdots$ は，式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1) A^{2k}，A^{2k+1} $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ。

(2) x_n，y_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ。

(3) 線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の長さを d_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。数列 $\{d_n\}$ の初項 d_1 と一般項 d_n を求めよ。また，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ が収束し，その和が 3 となるような r の値を求めよ。

$\boxed{4}$ a $(a > 0)$ を定数とし，$f(x) = 2a\log x - (\log x)^2$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフは，x 軸と点 $\mathrm{P}_1\,(x_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2\,(x_2,\ 0)$ $(x_1 < x_2)$ で交わっている。次の問いに答えよ。

(1) x_1，x_2 の値を求めよ。また，$y = f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) 点 P_1，P_2 における $y = f(x)$ の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき，$\lim_{a\to\infty} X(a)$ を求めよ。

(3) $a = 1$ とするとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。