

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2009 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

第 1 問

α と β は定数で、2 つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は次の関係式を満たすとする。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n x_k &= 4y_n - \alpha \\ \sum_{k=1}^n y_k &= 9x_n - \beta\end{aligned}\quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) x_1 と y_1 を、 α と β だけの式で表せ。
- (2) 2 次の正方行列 A で $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ がすべての自然数 n について成り立つものを求めよ。
- (3) $\alpha = 14$, $\beta = -21$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を求め、さらに $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

第 2 問

関数 $f(t)$ は区間 $[-1, 1]$ で連続で、偶関数、すなわち $f(-t) = f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\int_{-1}^0 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x) = -\int_{-1}^1 |t-x|f(t)dt$ ($-1 \leq x \leq 1$) について

$$F'(x) = -\int_{-1}^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt$$

$$F''(x) = -2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は、さらに等式

$$f(x) = -\int_{-1}^1 |t-x|f(t)dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

を満たすとする。このとき、関数 $g(x) = f(x) - f(0) \cos \sqrt{2}x$ について

$$g(0) = g'(0) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \{g'(x)\}^2 + g(x)^2 \right)' = 0$$

が成り立つことを示し、 $f(x) = f(0) \cos \sqrt{2}x$ を導け。

第 3 問

$0 < r < 1$ とし、点 O を原点とする xy 平面において、3 点 O , $A(2, 0)$, $B(0, 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と、互いに相似な 3 つの二等辺三角形 $O'AB$, $A'OB$, $B'OA$ を考える。ここで、辺 AB , OB , OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり、点 O' は直線 AB に対して点 O と反対側に、点 A' は第 2 象限に、点 B' は第 4 象限に、それぞれあるとする。 $t = \tan \angle A'OB$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 点 A' , B' の座標を, r , t の式で表せ。
- (2) 直線 AA' , および直線 BB' の方程式を $ax + by = c$ の形で求めよ。
- (3) 2 直線 AA' と BB' の交点を $M(x_0, y_0)$ とする。比 $\frac{y_0}{x_0}$ を r , t の式で表せ。
- (4) 点 O' の座標を r , t の式で表し, 3 直線 AA' , BB' , OO' が 1 点で交わることを示せ。

第 4 問

A, B2 人が次のようなゲームを行う。第三者 (A, B 以外の中立的立場の者) がさいころを投げ, 1 の目が出たら A だけに 3 点, 3 の目が出たら A だけに 2 点を与え, 2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら, A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し, 先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。 $n \geq 2$ のとき, $n - 1$ 回目までの試行では勝負はつかず, n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2) $q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき, $\sum_{n=1}^k q_n$ を求めよ。また $\sum_{n=1}^k p_n$ を求めよ。

(3) $a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^k p_n - a \right|$$

を求めよ。ただし, 必要ならば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{3^k} = 0,$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

を用いてよい。