

2009 年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

数 学

理系学部

(注 意)

- 1 問題紙は指示があるまで開かないこと。
- 2 答案用紙は 4 枚である。
- 3 答えは、各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。
- 4 答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。
- 5 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1 α と β は定数で、2つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は次の関係式を満たすとする。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n x_k &= 4y_n - \alpha \\ \sum_{k=1}^n y_k &= 9x_n - \beta\end{aligned}\quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) x_1 と y_1 を、 α と β だけの式で表せ。

(2) 2 次の正方行列 A で $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ がすべての自然数 n について成り立つものを求めよ。

(3) $\alpha = 14$, $\beta = -21$ のとき、 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を求め、さらに $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

- 2 関数 $f(t)$ は区間 $[-1, 1]$ で連続で、偶関数、すなわち $f(-t) = f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\int_{-1}^0 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x) = -\int_{-1}^1 |t-x|f(t)dt$ ($-1 \leq x \leq 1$) について

$$F'(x) = -\int_{-1}^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt$$

$$F''(x) = -2f(x)$$

を示せ。

- (3) 関数 $f(x)$ は、さらに等式

$$f(x) = -\int_{-1}^1 |t-x|f(t)dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

を満たすとする。このとき、関数 $g(x) = f(x) - f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0) = g'(0) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2 + g(x)^2\right)' = 0$$

が成り立つことを示し、 $f(x) = f(0)\cos\sqrt{2}x$ を導け。

3 $0 < r < 1$ とし、点 O を原点とする xy 平面において、3 点 O , $A(2, 0)$, $B(0, 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と、互いに相似な 3 つの二等辺三角形 $O'AB$, $A'OB$, $B'OA$ を考える。ここで、辺 AB , OB , OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり、点 O' は直線 AB に対して点 O と反対側に、点 A' は第 2 象限に、点 B' は第 4 象限に、それぞれあるとする。 $t = \tan \angle A'OB$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 点 A' , B' の座標を、 r , t の式で表せ。
- (2) 直線 AA' , および直線 BB' の方程式を $ax + by = c$ の形で求めよ。
- (3) 2 直線 AA' と BB' の交点を $M(x_0, y_0)$ とする。比 $\frac{y_0}{x_0}$ を r , t の式で表せ。
- (4) 点 O' の座標を r , t の式で表し、3 直線 AA' , BB' , OO' が 1 点で交わることを示せ。

4 A, B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者 (A, B 以外の中立的立場の者) がさいころを投げ、1 の目が出たら A だけに 3 点、3 の目が出たら A だけに 2 点を与え、2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら、A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し、先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。 $n \geq 2$ のとき、 $n - 1$ 回目までの試行では勝負はつかず、 n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2) $q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき、 $\sum_{n=1}^k q_n$ を求めよ。また $\sum_{n=1}^k p_n$ を求めよ。

(3) $a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^k p_n - a \right|$$

を求めよ。ただし、必要ならば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{3^k} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

を用いてよい。

