

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2008 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

第 1 問

自然数 n に対して, 2 次正方行列 A_n を

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A_n \quad (n \geq 1)$$

により定める。また, 2 次正方行列 B_n は

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} B_n - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) 数学的帰納法を用いて

$$A_n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} + 3^{n-1} \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つことを示せ。

- (2) ある 2 次正方行列 C に対して, $C = B_n - A_n$ がすべての n について成り立つとする。このとき, C を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす B_n のうち, 逆行列をもたないものは B_1 に限ることを示せ。

第 2 問

a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $a \geq 0$ のとき, $S(a) = \int_0^1 |x^3 - 3ax^2 + 2a^2x| dx$ を求めよ。

(2) a が $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき, $S(a)$ の最大値を求めよ。

第 3 問

xy 平面において、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。 a を正の実数とし、点 $A(0, 1)$ を通り、傾き a の直線を ℓ とする。 C と ℓ の交点で、 A と異なるものを P とし、 ℓ と直線 $y = -2$ の交点を Q とする。また、 P における C の接線を m とし、 m と直線 $y = -2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 m の方程式を a を用いて表せ。
- (2) a が正の値をとって動くとき、線分 QR の長さの最小値と、そのときの a の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた a の値に対して、点 A を通り、 $\angle QAR$ を二等分する直線の方程式を求めよ。

第 4 問

次の問いに答えよ。

- (1) a を定数とし、正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_n + n} - \sqrt{n}) = a$$

を満たすとする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 2a$ が成り立つことを示せ。

- (2) 自然数 L, n に対して

$$\sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) b は定数で、 $b > 1$ とする。自然数 n に対して、集合

$$\left\{ L \mid L \text{ は } \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < b \text{ を満たす自然数} \right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n}} = b$ が成り立つことを示せ。