2008年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 自然数 n に対して，2 次正方行列 A_n を

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A_n \quad (n \geqq 1)$$

により定める。また，2 次正方行列 B_n は

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} B_n - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (n \geqq 1)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) 数学的帰納法を用いて

$$A_n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} + 3^{n-1} \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立つことを示せ。

(2) ある 2 次正方行列 C に対して，$C = B_n - A_n$ がすべての n について成り立つとする。このとき，C を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす B_n のうち，逆行列をもたないものは B_1 に限ることを示せ。

$\boxed{2}$ a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $a \geqq 0$ のとき，$S(a) = \displaystyle\int_0^1 |x^3 - 3ax^2 + 2a^2x|\,dx$ を求めよ。

(2) a が $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 A $(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を ℓ とする。C と ℓ の交点で，A と異なるものを P とし，ℓ と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2) a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3) (2) で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle$QAR を二等分する直線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) a を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}\,)=a$$

を満たすとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$ が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 L，n に対して

$$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

が成り立つことを示せ。

(3) b は定数で，$b>1$ とする。自然数 n に対して，集合

$$\left\{L\ \middle|\ L\text{ は }\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b\text{ を満たす自然数}\right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=b$ が成り立つことを示せ。