2007年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = -x^3 + 3ax - 2b$ に対して，$f(x) = 0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3 = b^2$ となることを示せ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(2) (i) xy 平面上の直線 $\ell : y = mx + \dfrac{1}{3}$ が曲線 $C : y = x^{\frac{2}{3}}$ $(x \geqq 0)$ に接するとき，直線 ℓ の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(ii) (i) で求めた m の値に対する直線 ℓ，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ A を 2 次の正方行列とし，a と b はどちらも 0 でない実数とする。零ベクトルではない 2 つのベクトル $\overrightarrow{u} = (x,\ y)$，$\overrightarrow{v} = (z,\ w)$ に対して，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

が成り立つとする。$X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $xw = yz$ ならば，$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ は平行であることを示せ。

(2) X が逆行列をもたなければ，$a = b$ であることを示せ。

(3) a と b が異なるならば，A は逆行列をもつことを示せ。

$\boxed{3}$ $-1 < t < 1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y = t$ と楕円 C : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の交点を $\mathrm{Q}\,(-s,\ t)$，$\mathrm{R}\,(s,\ t)$ $(s > 0)$ とする。点 $\mathrm{P}\,(0,\ 1)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $S(t)$ を求めよ。また，$-1 < t < 1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた点 R における楕円 C の接線 ℓ と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle\mathrm{PRT}$ の値を求めよ。

(3) 楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1) で求めた点 R に対して求めよ。

$\boxed{4}$ 1 つの袋に 5 個の玉が入っており，それぞれに，0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれている。この袋から玉を 1 つ取り出し，もとに戻すという試行をくり返していき，取り出した玉に書かれた数字と直前の試行で取り出した玉の数字との和が 4 となったとき終了する。

$n \geqq 2$ とする。n 回以下の試行で終了したときは，最後に取り出した玉に書かれた数字を得点とし，n 回の試行では終了しない場合の得点は 0 とする。このようにして定まる得点の期待値を E_n とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $2 \leqq k \leqq n$ とする。ちょうど k 回目の試行で終了する確率を P_k とするとき，$P_2,\ P_3,\ P_4$ を求めよ。また，P_k を k を用いて表せ。

(2) $E_2,\ E_3$ を求めよ。また，E_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\alpha = \displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n$ を求め，さらに $E_n \geqq \alpha - \dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。