

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2005 年

試験時間：120 分

問題数：4 問

第 1 問

3点 $A(6, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また、線分 HO 上の点で、 H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし、 P_t の動く範囲から両端点 H , O はのぞくとする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 H の座標と、 t の動く範囲を求めよ。
- (2) 平面 α 上にあり、 P_t からの距離が OH となる点を作る円を S_t とする。 S_t とその内部を底面とし、 P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。
- (3) (2) の $f(t)$ の最大値を求めよ。

第 2 問

定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする。行列 $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) P の 2 乗は $P^2 = \begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ という形で表されることを示せ。

(2) n が自然数のとき、 P の n 乗は

$$P^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$$

という形で表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) (2) の p_n について、数列 $\{p_n\}$ の一般項と $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

第 3 問

関数 $f(x)$ を $0 \leq x \leq \pi$ のとき $f(x) = \sin x$ とおき, $x < 0$ または $\pi < x$ のとき $f(x) = 0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 2つの定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx$ と $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ の値を求めよ。

(3) $a > 0$ について

$$T(a) = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{2af(x) + \frac{1}{a}f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$$

とおく。 $T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

第 4 問

1 個のさいころを振る試行をくり返す。 n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

- (1) a_n を n を用いて表せ。
- (2) $M_n = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n kb_k$ とする。 M_n を n を用いて表せ。
- (3) (2) の M_n について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ を求めよ。ただし、 $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい。