2005年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 3 点 A $(6,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ 6,\ 0)$，C $(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また，線分 HO 上の点で，H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし，P_t の動く範囲から両端点 H，O はのぞくとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標と，t の動く範囲を求めよ。

(2) 平面 α 上にあり，P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし，P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3) (2) の $f(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ 定数 a は $0 < a < 1$ をみたすとする。行列 $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) P の 2 乗は $P^2 = \begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ という形で表されることを示せ。

(2) n が自然数のとき，P の n 乗は

$$P^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$$

という形で表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) (2) の p_n について，数列 $\{p_n\}$ の一般項と $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x) = \sin x$ とおき，$x < 0$ または $\pi < x$ のとき $f(x) = 0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 2 つの定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2\,dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ の値を求めよ。

(3) $a > 0$ について

$$T(a) = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{2af(x) + \frac{1}{a} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$$

とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 1 個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ について，k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) $M_n = \dfrac{1}{a_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k b_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

(3) (2) の M_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n$ を求めよ。ただし，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい。