

入学試験過去問題

数 学

金沢大学（理系）

対象年度：2004年

試験時間：120分

問題数：4問

第 1 問

座標平面上で動点 P が、 x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し、 y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し、停留することを文字 c で表す。 a, b, c からなる文字列が与えられたとき、点 P は原点を出発し、その文字列に従って移動する。たとえば、長さ 4 の文字列 $acab$ に対しては、点 P は原点 $(0, 0)$ から出発して、 $(1, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ と移動し、点 $(2, 1)$ が到達点となる。長さ n の文字列のなかで、点 P の到達点が (p, q) となる文字列の個数を $F_n(p, q)$ とする。

- (1) $F_n(p, q)$ を p, q, n を用いて表せ。ただし、 n は自然数、 p, q は $p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq n$ の範囲の整数とする。
- (2) 自然数 n が与えられているとき、 $F_n(p-1, q) \leq F_n(p, q)$ をみたす整数 p, q の組 (p, q) ($p \geq 1, q \geq 0, p+q \leq n$) の範囲を図示せよ。また、 $F_n(p, q-1) \leq F_n(p, q)$ をみたす整数 p, q の組 (p, q) ($p \geq 0, q \geq 1, p+q \leq n$) の範囲を図示せよ。
- (3) $n+1$ が 3 の倍数となる自然数 n が与えられているとき、 $F_n(p, q)$ が最大になる自然数 p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

第 2 問

複素数平面上で中心が 1, 半径 1 の円を C とする。以下, i は虚数単位とする。

- (1) C 上の点 $z = 1 + \cos t + i \sin t$ ($-\pi < t < \pi$) について, z の絶対値および偏角を t を用いて表せ。また $\frac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。
- (2) z が円 C 上の 0 でない点を動くとき, $w = \frac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線をえがくことを示し, この放物線を図示せよ。

第 3 問

座標平面上で、半径 r の 2 つの円 O_1 , O_2 の中心をそれぞれ (r, r) , $(1-r, 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし、領域 D の面積を S とする。以下、 r は $0 < r \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

- (1) 円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。
- (2) 円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P , Q で交わるとする。 $\theta = \frac{1}{2}\angle PO_1Q$ において、半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。
- (3) 面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。

第 4 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{1}{e^{-x} + 1}$ のグラフの概形をかけ。
- (2) $g_a(r) = \int_{-1}^r \left(\frac{1}{e^{-x} + 1} - \frac{1}{e^{a-x} + 1} \right) dx$ とする。ただし、 $a > 0$ である。このとき、 $\lim_{r \rightarrow \infty} g_a(r)$ を求めよ。
- (3) $h(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} g_a(r)$ とおく。このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{h(a)}{a}$ を求めよ。