2004年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 座標平面上で動点Pが，x 軸の正の方向へ1進むことを文字aで表し，y 軸の正の方向へ1進むことを文字bで表し，停留することを文字cで表す。a，b，cからなる文字列が与えられたとき，点Pは原点を出発し，その文字列に従って移動する。たとえば，長さ4の文字列acabに対しては，点Pは原点 $(0,\ 0)$ から出発して，$(1,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$ と移動し，点 $(2,\ 1)$ が到達点となる。長さ n の文字列のなかで，点Pの到達点が $(p,\ q)$ となる文字列の個数を $F_n(p,\, q)$ とする。

(1) $F_n(p,\, q)$ を p，q，n を用いて表せ。ただし，n は自然数，p，q は $p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$p+q \leqq n$ の範囲の整数とする。

(2) 自然数 n が与えられているとき，$F_n(p-1,\, q) \leqq F_n(p,\, q)$ をみたす整数 p，q の組 $(p,\ q)$（$p \geqq 1$，$q \geqq 0$，$p+q \leqq n$）の範囲を図示せよ。また，$F_n(p,\, q-1) \leqq F_n(p,\, q)$ をみたす整数 p，q の組 $(p,\ q)$（$p \geqq 0$，$q \geqq 1$，$p+q \leqq n$）の範囲を図示せよ。

(3) $n+1$ が3の倍数となる自然数 n が与えられているとき，$F_n(p,\, q)$ が最大になる自然数 p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 複素数平面上で中心が1，半径1の円を C とする。以下，i は虚数単位とする。

(1) C 上の点 $z = 1 + \cos t + i \sin t$（$-\pi < t < \pi$）について，$z$ の絶対値および偏角を t を用いて表せ。また $\dfrac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。

(2) z が円 C 上の0でない点を動くとき，$w = \dfrac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線をえがくことを示し，この放物線を図示せよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上で，半径 r の 2 つの円 O_1，O_2 の中心をそれぞれ $(r,\ r)$，$(1-r,\ 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし，領域 D の面積を S とする。以下，r は $0 < r \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

(1) 円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。

(2) 円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P，Q で交わるとする。$\theta = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PO_1Q}$ とおいて，半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。

(3) 面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフの概形をかけ。

(2) $g_a(r) = \displaystyle\int_{-1}^{r} \left(\frac{1}{e^{-x}+1} - \frac{1}{e^{a-x}+1} \right) dx$ とする。ただし，$a > 0$ である。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty} g_a(r)$ を求めよ。

(3) $h(a) = \displaystyle\lim_{r\to\infty} g_a(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{h(a)}{a}$ を求めよ。