2001年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

理系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は4枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) A^2，A^4 を求めよ。

(2) $A^3 + 2A^2 + 4A + 8E$ を求めよ。

(3) $E + \frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 整式 $f(x)$ は関係式 $\int_0^x f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x + 2\int_x^0 f(x)\,dx$ を満たしている。また $r \geqq 0$ に対し，$|x| \leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求め，$y = |f(x)|$ のグラフをかけ。

(2) $F(r)$ を求めよ。

(3) $\int_0^2 F(r)\,dr$ を求めよ。

$\boxed{3}$ n を自然数とする。数 w は，

$$w = 2^i + 2^j + 2^k \qquad (i,\ j,\ k \text{ は自然数で } 1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n = 7$ とする。w の値が 2^8，$2^6 + 2^4$ となるそれぞれの場合について，$(i,\ j,\ k)$ をすべて求めよ。

(2) n を一般の自然数とする。$2^r + 2^s$（r，s は自然数で $r < s$）の形で表される w の値は全部で何個あるか。

(3) 一般の自然数 n に対し，w の値は全部で何個あるか。

$\boxed{4}$ 2 次関数 $y = f(x)$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通り（$p > 0$），曲線 $y = e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y = e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x = 0$，$x = p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1，F_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。このとき V_1，V_2 の値を，p を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{p \to +0} \frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。