2014年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

文系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は3枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1. 放物線 $C : y = x^2 + 2x$ 上の 2 点 $(a,\ a^2 + 2a)$，$(b,\ b^2 + 2b)$ における接線をそれぞれ ℓ_a，ℓ_b とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a < b$ とする。

(1) 2 直線 ℓ_a，ℓ_b の方程式を求めよ。また，ℓ_a と ℓ_b の交点の x 座標を求めよ。

(2) 放物線 C と 2 直線 ℓ_a，ℓ_b とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) 2 直線 ℓ_a，ℓ_b が垂直に交わるように a，b が動くとき，a，b がみたす関係式を求めよ。また，そのときの面積 S の最小値とそれを与える a，b の値を求めよ。

2. 1 から 4 までの番号を書いた玉が 2 個ずつ，合計 8 個の玉が入った袋があり，この袋から玉を 1 個取り出すという操作を続けて行う。ただし，取り出した玉は袋に戻さず，また，すでに取り出した玉と同じ番号の玉が出てきた時点で一連の操作を終了するものとする。

玉をちょうど n 個取り出した時点で操作が終わる確率を $P(n)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(2)$，$P(3)$ を求めよ。

(2) 6 以上の k に対し，$P(k) = 0$ が成り立つことを示せ。

(3) 一連の操作が終了するまでに取り出された玉の個数の期待値を求めよ。

3. 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots\cdots + na_n = 2^n - 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

をみたしている。次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ とおくとき,

$$S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k}$ を求めよ。