

2009 年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

数 学

文系学部

(注 意)

- 1 問題紙は指示があるまで開かないこと。
- 2 答案用紙は 3 枚である。
- 3 答えは、各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。
- 4 答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。
- 5 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1. 次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき、不等式 $\frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) \geq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3} \left(a_n + \frac{1}{a_n^2} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

(i) $n \geq 1$ のとき

$$a_n > a_{n+1} > 2^{\frac{1}{3}}$$

を示せ。

(ii) $n \geq 2$ のとき

$$a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2} < \frac{2}{3} \left(a_n - \frac{2}{a_{n-1}^2} \right)$$

を示せ。

(iii) $n \geq 1$ のとき

$$0 < a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

を示せ。

2. 実数 t と $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して, 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t^2$$

$$g(x) = x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \frac{1}{16}$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{2}$, $2\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ の大小を比べよ。また, この 3 つの値が等しくなる θ をすべて求めよ。

(2) θ は (1) で求めた値とは異なる定数とする。

(i) 2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ とするとき, 2 次方程式 $D(t) = 0$ の解 α , β ($\alpha < \beta$) を求め,

$$\int_{\alpha}^{\beta} D(t)dt = -\frac{\cos^6 2\theta}{6}$$

となることを示せ。

(ii) 2 つの 2 次方程式 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち, 他方が虚数解をもつための t の範囲を求めよ。

3. xy 平面において, 点 $A(a, 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし $0 < r \leq a$ とする。円 C の周上に, y 座標が正である点 P と, 点 $E(a + r, 0)$ をとる。さらに, 点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q , 2 点 E, P を通る直線と y 軸との交点を R , $\angle AEP$ を θ とする。このとき, 3 点 P, Q, R を頂点とする $\triangle PQR$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PQR$ は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に, これが正三角形となる場合の, θ の値を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ が正三角形となり, さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の, a と r の関係式を求めよ。
- (3) $\triangle PQR$ が正三角形となり, さらにその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の, a と r の関係式を求めよ。

