2008年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　学

文系学部

（注　意）

1　問題紙は指示があるまで開かないこと。

2　答案用紙は3枚である。

3　答えは，各問題番号が書かれた答案用紙の解答欄に記入すること。

4　答案用紙の網かけの部分や裏面には記入しないこと。

5　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1. 実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = -(a+1)x - 1, \quad g(x) = 2x + \frac{a}{3}$$

とし，$m(a) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $m(a) > 0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2) (1) で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x) = g(x) - m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)h(x)\,dx = 0$ となる a の値を求めよ。

2. xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S : x^2+y^2+z^2 = 1$，および S 上の点 A $(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 P $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A，P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$t$ は実数）とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3) 球面 S と平面 $y = \dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

3. $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で定義された関数

$$f(\theta) = a\sin\theta\cos\theta + b(\sin\theta - \cos\theta) - 1$$

を考える。ただし，a，b は正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ として，$f(\theta)$ を a，b，t を用いて表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 等式 $f(\theta) = 0$ を満たす θ が存在するような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を座標平面上に図示せよ。