

確 認 試 験 問 題

ベ ク ト ル

(配点 100 点)

(日付) 年 月 日

(開始)

		:		
--	--	---	--	--

 ~ (90 分) ~

		:		
--	--	---	--	--

 (終了)

注 意 事 項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 8 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 6 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 6 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 19)

原点を O とする座標平面上に、次の点を定める。

$$\begin{aligned} A(3, 4), \quad B(1, 6), \quad C(-3, -1), \quad D(1, -5), \\ E(0, -7), \quad F(-4, 3), \quad H(-1, -8) \end{aligned}$$

- (1) $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は平行であることを示せ。
- (3) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{DE}$ の内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ を求めよ。
- (4) $\triangle DEF$ の重心を G とするとき、 $\overrightarrow{DG}$ の成分を求めよ。
- (5) $\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CF}$ が成り立つような実数 a, b の値を求めよ。
- (6) 点 $P(-2, p)$ を定める。 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ の成す角が 90° となる実数 p の値を求めよ。
- (7) 四角形 $ABHQ$ が平行四辺形となるような点 Q の座標を求めよ。
- (8) t を実数とする。 $|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}|$ が最小となるような t の値を求めよ。

第 2 問

(配点 16)

$\triangle ABC$ と点 P が, $7\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 9\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ を満たしている。

- (1) 点 P はどのような位置にあるか。辺, 点, 内分, 外分, 比などの表現の中から適切なものを用いて答えよ。
- (2) 面積の比 $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA$ を求めよ。
- (3) 線分 AC を $1 : 2$ に内分する点を D とし, 半直線 DP と線分 BC との交点を E とする。このとき, 点 E は線分 BC をどのような比で内分するか答えよ。

第 3 問

(配点 15)

$\triangle ABC$ の重心を G , 外接円の中心を O とする。

- (1) 点 H を, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ となるようにとると, H は $\triangle ABC$ の垂心となることを示せ。必要に応じて, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ を計算すると良い。
- (2) 3 点 O , G , H は一直線上にあることを示せ。
- (3) 線分 AB , BC , CA を $3:1$ に内分する点をそれぞれ P , Q , R とする。このとき, $\triangle PQR$ の重心は点 G と一致することを示せ。

第 4 問

(配点 17)

各辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ がある。辺 AB の中点を M ，線分 OM の中点を N ， $\triangle OAB$ の重心を L ， $\triangle ABC$ の重心を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

- (1) 3つの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ， $\vec{c} \cdot \vec{a}$ は等しいことを示し，その値を求めよ。
- (2) $OM \perp CL$ であることを示せ。
- (3) 線分 CN を $4:1$ に内分する点を K とおく。このとき，3点 O ， K ， G は同一直線上にあることを示し， $OK:KG$ を求めよ。
- (4) 辺 BC を $1:2$ に内分する点を X ，線分 OX を $5:2$ に外分する点を Y ， $\triangle YMG$ の重心を Z とする。このとき， $\overrightarrow{OZ}$ を $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ で表し， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OZ}$ を求めよ。

第 5 問

(配点 17)

d を実数とする。O を原点とする座標空間上に、4 点

$$A(0, 2, 6), \quad B(-3, 0, 4), \quad C(-2, 3, 5), \quad D(-8, -1, d)$$

を定める。4 点 A, B, C, D は同一平面上にある。

また、座標空間上のベクトル $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ に対し、演算 $\vec{p} \times \vec{q}$ を

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_y q_z - p_z q_y, p_z q_x - p_x q_z, p_x q_y - p_y q_x)$$

と定め、 $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ とする。

(1) d の値を求めよ。

(2) $\vec{n}$ の成分を求め、 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であることを確かめよ。

(3) $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ とするとき、4 点 A, B, C, D を通る平面の方程式は、実数 w を用いて

$$n_x x + n_y y + n_z z + w = 0$$

と表されることを示し、 w の値を求めよ。

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ。

第 6 問

(配点 16)

O を原点とする座標平面上に, X (1, 0), Y (0, 1), A (3, 2), B (1, 3) をとる。ある点 P が実数 p, q を用いて

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OX} + q\overrightarrow{OY} = (p, q)$$

と表されるとき, P の x 座標は p , y 座標は q であり, 直線 OX は x 軸, 直線 OY は y 軸上にある。また, ある点 S が実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

と表されるとき, この s を S の a 座標, t を b 座標と定め, S を $(s, t)_{ab}$ と表記する。 b 座標が 0 の点の集合は直線を成し, それを a 軸, 同様に a 座標が 0 の点の集合が成す直線を b 軸とし, a 軸の正の方向は $\overrightarrow{OA}$ の方向, b 軸の正の方向は $\overrightarrow{OB}$ の方向と定める。座標がどのような形になっているかを確認するために, 2つの図を示した。図 6.1 は, x 座標と y 座標のいずれかが整数である点を破線で表したもので, 図 6.2 は, a 座標と b 座標のいずれかが整数である点を破線で表したものである。

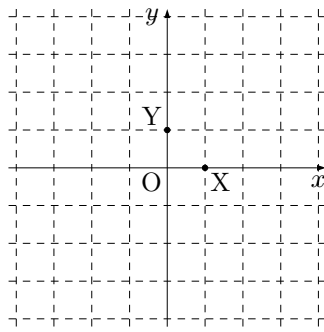


図 6.1

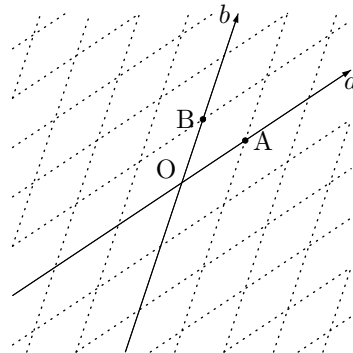


図 6.2

さて, 上記議論において, ベクトルの係数を動かすときに点の動く範囲を考える。例として, 実数 p, q が

$$2p + q \leq 2, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0$$

を満たすとき, $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OX} + q\overrightarrow{OY}$ で定まる点 P の動きうる範囲 D_P を考える。これは, 座標平面上で

$$2x + y \leq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

が表す領域と等しく, 図 6.3 の塗りつぶし部分のようになる。ただし, 境界を含む。この領域の形状は三角形であり, 頂点は (0, 0), (1, 0), (0, 2) である。同じ p, q の条件で $\overrightarrow{OQ} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ で定まる点 Q の動きうる範囲 D_Q は, $(0, 0)_{ab}$, $(1, 0)_{ab}$, $(0, 2)_{ab}$ を頂点とする三角形の境界を含む内側であり, 図 6.4 の塗りつぶし部分のようになる。 D_P の面積を S_P , D_Q の面積を S_Q とし,

$$r = \frac{S_Q}{S_P}$$

とする。

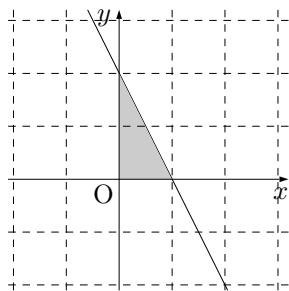


図 6.3

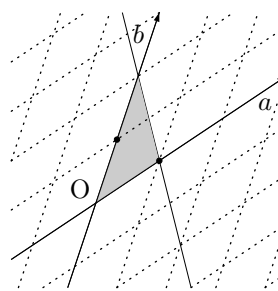


図 6.4

領域が三角形の上記例以外においても, $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OX} + q\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OQ} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ で定められる点 P, Q が, 同じ p, q の条件で動くとき, 点 P が (p, q) を通るならば, 点 Q が $(p, q)_{ab}$ を通る。また, その逆も成り立つ。そして, 点 P, Q の動いてできる図形の面積がそれぞれ S'_P, S'_Q という正の実数値を持つとき, $\frac{S'_Q}{S'_P} = r$ が成り立つ。

- (1) 実数 s, t について, a 座標が s , b 座標が t である点 $S(s, t)_{ab}$ の x 座標と y 座標を s, t を用いて表せ。

- (2) r の値を求めよ。

- (3) 実数 s, t が

$$3s + 2t \leq 6, \quad s + t \geq 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

を満たしながら動くとき, $\overrightarrow{OT} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定まる点 T の動きうる範囲を, 図 6.2 を写した上に図示し, その面積を求めよ。

- (4) 実数 s, t が

$$s^2 + t^2 + 4s - 6t + 9 \leq 0$$

を満たしながら動くとき, $\overrightarrow{OU} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定まる点 U の動きうる範囲を, 図 6.2 を写した上に図示し, その面積を求めよ。

- (5) 実数 s, t が

$$(s + 2)(s + 1)(s - 1) - t = 0$$

を満たしながら動くとき, $\overrightarrow{OV} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定まる点 V の動きうる範囲を, 図 6.2 を写した上に図示せよ。