
確 認 試 験 問 題

ベ ク ト ル

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：座標平面とベクトル

1.1 問題

原点を O とする座標平面上に、次の点を定める。

$$A(3, 4), \quad B(1, 6), \quad C(-3, -1), \quad D(1, -5), \\ E(0, -7), \quad F(-4, 3), \quad H(-1, -8)$$

- (1) $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は平行であることを示せ。
- (3) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{DE}$ の内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ を求めよ。
- (4) $\triangle DEF$ の重心を G とするとき、 $\overrightarrow{DG}$ の成分を求めよ。
- (5) $\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CF}$ が成り立つような実数 a, b の値を求めよ。
- (6) 点 $P(-2, p)$ を定める。 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ の成す角が 90° となる実数 p の値を求めよ。
- (7) 四角形 $ABHQ$ が平行四辺形となるような点 Q の座標を求めよ。
- (8) t を実数とする。 $|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}|$ が最小となるような t の値を求めよ。

1.2 解答

- (1) $\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 6 - 4) = (-2, 2)$, 大きさは $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ である。
- (2) $\overrightarrow{CD} = (4, -4) = -2\overrightarrow{AB}$ より, $\overrightarrow{CD}$ が $\overrightarrow{AB}$ の定数倍で表されるから, この2つのベクトルは平行である。
- (3) $\overrightarrow{DE} = (-1, -2)$ より,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = -2$$
- (4) 任意の点 X について, $\overrightarrow{XG} = \frac{\overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{XF}}{3}$ が成り立つ。 X を D として, $\overrightarrow{DE} = (-1, -2)$, $\overrightarrow{DF} = (-5, 8)$ より

$$\overrightarrow{DG} = \frac{\overrightarrow{DD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}}{3} = (-2, 2)$$
- (5) $\overrightarrow{OH} = (-1, -8)$, $\overrightarrow{CF} = (-1, 4)$ である。

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
 が成り立つような a, b は, x 成分と y 成分をそれぞれ比較して

$$\begin{cases} -2a - b = -1 \\ 2a + 4b = -8 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} -2a - b = -1 \\ 2a + 4b = -8 \end{cases} \quad (1.2)$$
 を解き, $a = 2, b = -3$ を得る。

- (6) 2つのベクトルの成す角が 90° である場合、それらの内積が 0 である。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot p = 0$$

より $p = \frac{3}{2}$ である。

- (7) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QH}$ が成り立つから、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{AB} = (-1 + 2, -8 - 2) = (1, -10)$ であり、これが点 Q の座標と等しい。

- (8) 題意を満たす t は、ベクトルの大きさの 2 乗

$$|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + t^2|\overrightarrow{AB}|^2$$

を最小にする t と等しい。

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 2$$

より

$$|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}|^2 = 8t^2 + 4t + 25 = 8\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{49}{2}$$

であるから、 $t = -\frac{1}{4}$ のときにこれは最小になり、この t の値が求めるべき値である。

1.3 解説

座標平面上の点の成分に関する基本事項を確認します。2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ に対し、 $\overrightarrow{AB}$ の成分は、終点から始点を引いて $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ で与えられます。その大きさは $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ です。また、2つのベクトル $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ の内積は $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ で計算でき、 $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ のとき、 $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行であることは一方が他方の実数倍で表せること、垂直であることは $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ であることと同値です。

- (1) 成分は終点 B の座標から始点 A の座標を引いて求めます。大きさは各成分の 2 乗和の平方根です。符号の引き間違いに注意しましょう。
- (2) 2つのベクトルが平行であることは、一方が他方の実数倍で表せることと同値です。 $\overrightarrow{CD}$ を成分計算し、 $\overrightarrow{AB}$ の何倍になっているかを見れば示せます。同じ向きか逆向きかは問われていないので、実数倍で表せることを述べれば十分です。
- (3) 内積は成分どうしの積の和です。 $\overrightarrow{DE}$ を成分で求めてから、(1) で求めた $\overrightarrow{AB}$ との内積を計算します。
- (4) 三角形 DEF の重心 G については、任意の点 X を始点として $\overrightarrow{XG} = \frac{\overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{XF}}{3}$ が成り立ちます。ここでは $\overrightarrow{DG}$ を問われているので、始点を D に選ぶと $\overrightarrow{DD} = \vec{0}$ となり計算が軽くなります。
- (5) $\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CF}$ の両辺を成分で表し、 x 成分どうし、 y 成分どうしを比較すると a, b についての連立方程式が得られます。これを解きます。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CF}$ が平行でない（一次独立である）ため、 a, b はただ一組に定まります。
- (6) 2つのベクトルの成す角が 90° であることは、内積が 0 であることと同値です。 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ を p についての方程式とみて解きます。

- (7) 四角形 ABHQ が平行四辺形になる条件を、向かい合う辺が等しいベクトルで表せることに翻訳します。頂点を $A \rightarrow B \rightarrow H \rightarrow Q$ の順にたどるので、辺 AB と辺 QH が対応し、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QH}$ が成り立ちます。ここから $\overrightarrow{OQ}$ を求めれば点 Q の座標が分かります。頂点をたどる向きを取り違えると別の四角形になってしまうので、順序に注意しましょう。
- (8) t の値によって大きさ $|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}|$ がどう変わるかを考えます。大きさそのものより、2 乗した $|\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}|^2$ を扱う方が見通しがよく、これは t についての 2 次関数になります。展開して平方完成すれば、最小を与える t が読み取れます。大きさは 0 以上なので、2 乗が最小になる t がもとの大きさも最小にします。

1.4 採点

【第1問 19点】

配点は、(1) 2 点 (2) 2 点 (3) 2 点 (4) 2 点 (5) 2 点 (6) 3 点 (7) 3 点 (8) 3 点

2 第2問：三角形とベクトル

2.1 問題

$\triangle ABC$ と点 P が, $7\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 9\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ を満たしている。

- (1) 点 P はどのような位置にあるか。辺, 点, 内分, 外分, 比などの表現の中から適切なものを用いて答えよ。
- (2) 面積の比 $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA$ を求めよ。
- (3) 線分 AC を $1:2$ に内分する点を D とし, 半直線 DP と線分 BC との交点を E とする。このとき, 点 E は線分 BC をどのような比で内分するか答えよ。

2.2 解答

- (1) 等式を A を始点として整理すると,

$$\begin{aligned} -7\overrightarrow{AP} + 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 9(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \overrightarrow{0} \\ \iff 21\overrightarrow{AP} &= 5\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC} \\ \iff \overrightarrow{AP} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC}}{14} \end{aligned}$$

だから, 線分 BC を $9:5$ に内分する点を M として, P は線分 AM を $2:1$ に内分する点である。

- (2) それぞれの面積を $\triangle ABC$ を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \triangle PAB &= \frac{9}{14} \cdot \frac{2}{3} \cdot \triangle ABC \\ \triangle PBC &= \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \\ \triangle PCA &= \frac{5}{14} \cdot \frac{2}{3} \cdot \triangle ABC \end{aligned}$$

従って,

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{9}{14} \cdot \frac{2}{3} : \frac{1}{3} : \frac{5}{14} \cdot \frac{2}{3} = 9 : 7 : 5$$

を得る。

- (3) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ であるから,

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD} = \frac{5}{21}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{21}\overrightarrow{AC}$$

であり, 点 E は半直線 DP 上にあるから, 実数 k を用いて $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{DP}$ と表せる。これを始点 A で整理して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{DP} &\iff \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}) \\ &\iff \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AP} + (1-k)\overrightarrow{AD} \\ &\iff \overrightarrow{AE} = \frac{5}{21}k\overrightarrow{AB} + \left(\frac{2}{21}k + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC} \end{aligned} \tag{2.1}$$

である。点 E が線分 BC 上にあるから、(2.1)の右辺について、各項の係数の和が 1 になればよく、

$$\frac{5}{21}k + \left(\frac{2}{21}k + \frac{1}{3}\right) = 1$$

を解いて $k = 2$ を得る。これを (2.1)に代入して

$$\overrightarrow{AE} = \frac{10}{21}\overrightarrow{AB} + \frac{11}{21}\overrightarrow{AC}$$

となるから、点 E は線分 BC を 11 : 10 に内分する。

2.3 解説

$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ の関係式から点 P の位置や面積比を調べる問題です。点 P がどこにあるか分からないので、頂点 A (または B, C) を始点にそろえて $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP}$ などと書き直し、 $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の一次結合で表すのが基本方針です。

- (1) 始点を A にそろえて整理すると $21\overrightarrow{AP} = 5\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC}$, すなわち $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5\overrightarrow{AB} + 9\overrightarrow{AC}}{14}$ となります。分母の $14 = 5 + 9$ から、辺 BC を 9 : 5 に内分する点 M がとれ、 $\frac{2}{3}$ から P が線分 AM を 2 : 1 に内分する点だと読み取れます。係数を内分の形に整えるのがこつです。
- (2) (1) で分かった内分の比を使って、 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ をそれぞれ $\triangle ABC$ で表して比を作ります。なお、 $7\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 9\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ のとき、面積比が $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = 7 : 5 : 9$ と係数に一致するという有名な事実があり、結果の検算に使えます。
- (3) 点 E は半直線 DP 上にあるので $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{DP}$ とおけます。これを始点 A で整理して $\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表し、点 E が線分 BC 上にある条件 ($\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の係数の和が 1) から k を決めます。求めた $\overrightarrow{AE}$ の係数が、そのまま BC の内分比を与えます。共線条件を「係数の和が 1」で使う点が要点です。

2.4 採点

【第2問 16点】

配点は、(1) 6点 (2) 5点 (3) 5点

3 第3問：三角形の五心とベクトル

3.1 問題

$\triangle ABC$ の重心を G ，外接円の中心を O とする。

- (1) 点 H を， $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ となるようにとると， H は $\triangle ABC$ の垂心となることを示せ。必要に応じて， $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ を計算すると良い。
- (2) 3点 O ， G ， H は一直線上にあることを示せ。
- (3) 線分 AB ， BC ， CA を $3:1$ に内分する点をそれぞれ P ， Q ， R とする。このとき， $\triangle PQR$ の重心は点 G と一致することを示せ。

3.2 解答

- (1) O は $\triangle ABC$ の外接円の中心であるため， $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ である。また，

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。本問では $\angle A \neq 90^\circ$ より $H \neq A$ であり $\overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$ ，また $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ であるから， $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ である。同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= 0\end{aligned}$$

となり，同様に $\overrightarrow{BH} \neq \vec{0}$ ， $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ であるから $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ である。ゆえに， H は $\triangle ABC$ の垂心である。

- (2) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH}$ より， O ， G ， H は同一直線上にある。

- (3) $\overrightarrow{OP}$ ， $\overrightarrow{OQ}$ ， $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{OB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OR} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4} \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

である。したがって， $\triangle PQR$ の重心を G' とするとき，

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

であり、これは $\overrightarrow{OG}$ と等しい。したがって、 G と G' は一致する。

3.3 解説

三角形の五心のうち、外心・重心・垂心をベクトルで扱う問題です。外心 O は3頂点から等距離にあるため $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ が成り立ち、これが計算の要になります。垂心は各頂点から対辺に下ろした垂線の交点なので、たとえば $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (辺 BC への垂直) を示せば、 H がその垂線上にあることが分かります。始点をすべて外心 O にそろえて位置ベクトルで表すと、一貫して計算を進められます。

- (1) H が垂心であることを示すには、 $\overrightarrow{AH}$ が辺 BC に垂直、 $\overrightarrow{BH}$ が辺 AC に垂直であることを言えば十分です (2 辺への垂線の交点が定まれば残り 1 辺への垂直も従います)。 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ から $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ と表し、内積を計算します。展開すると $|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2$ の形が現れますが、外心の性質からこれらは等しく、0 になります。
- (2) 重心 G は $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, (1) より $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ですから、 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH}$ が成り立ちます。 $\overrightarrow{OG}$ が $\overrightarrow{OH}$ の実数倍で表せることから、3 点 O, G, H は一直線上にあります。この直線はオイラー線と呼ばれます。
- (3) 内分点の位置ベクトルの公式を使います。線分 AB を $3:1$ に内分する点 P は $\overrightarrow{OP} = \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{OB}}{3+1}$ で表せます (内分比と係数の対応が逆になりやすいので注意しましょう)。 P, Q, R を同様に表し、 $\triangle PQR$ の重心 G' の位置ベクトルを計算すると、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の係数がすべて等しくなって $\overrightarrow{OG}$ に一致します。よって G' と G は同じ点です。

3.4 採点

【第3問 15点】

配点は、(1) 6 点 (2) 4 点 (3) 5 点

4 第4問：正四面体と空間ベクトル

4.1 問題

各辺の長さが1である正四面体 OABC がある。辺 AB の中点を M, 線分 OM の中点を N, $\triangle OAB$ の重心を L, $\triangle ABC$ の重心を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

- (1) 3つの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ は等しいことを示し, その値を求めよ。
- (2) $OM \perp CL$ であることを示せ。
- (3) 線分 CN を 4 : 1 に内分する点を K とおく。このとき, 3点 O, K, G は同一直線上にあることを示し, $OK : KG$ を求めよ。
- (4) 辺 BC を 1 : 2 に内分する点を X, 線分 OX を 5 : 2 に外分する点を Y, $\triangle YMG$ の重心を Z とする。このとき, $\overrightarrow{OZ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表し, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OZ}$ を求めよ。

4.2 解答

- (1) 正四面体の各面は正三角形であるから, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ である。したがって,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

である。

- (2) M は AB の中点であるから, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ である。L は OM を 2 : 1 に内分するから, $\overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ である。内積 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CL}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CL} &= \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OC}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{6} \left(|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{b}|^2 - 3\vec{b} \cdot \vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから, $OM \perp CL$ が示された。

- (3) $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ である。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OC} + \frac{4}{5}\overrightarrow{ON} \\ &= \frac{1}{5}\vec{c} + \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} \\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{OG} \end{aligned}$$

より, $\overrightarrow{OK}$ が $\overrightarrow{OG}$ の定数倍で表されることから, O, K, G は同一直線上にあり, $OK : KG = 3 : 2$ である。

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \overrightarrow{OX} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OX} = \frac{10}{9}\overrightarrow{b} + \frac{5}{9}\overrightarrow{c} \text{ より,} \\
 \overrightarrow{OZ} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OG}) \\
 &= \frac{1}{3}\left(\frac{10}{9}\overrightarrow{b} + \frac{5}{9}\overrightarrow{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}\right) \\
 &= \frac{5}{18}\overrightarrow{a} + \frac{35}{54}\overrightarrow{b} + \frac{8}{27}\overrightarrow{c}
 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OZ} &= \overrightarrow{a} \cdot \left(\frac{5}{18}\overrightarrow{a} + \frac{35}{54}\overrightarrow{b} + \frac{8}{27}\overrightarrow{c}\right) \\
 &= \frac{5}{18}|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{35}{54}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \frac{8}{27}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \\
 &= \frac{5}{18} \cdot 1 + \frac{35}{54} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

である。

4.3 解説

正四面体を題材にした空間ベクトルの問題です。 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ という3つのベクトルを基準（基底）にとり、出てくる点をすべてこの3つで表すのが方針です。各面が正三角形であることから、大きさや内積の値がすべて決まり、それを使って垂直条件や共線条件、内積を計算していきます。 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ は一次独立なので、係数を比較すれば等式が扱えます。

- (1) 正四面体の各面は1辺の長さが1の正三角形ですから、 $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1$ で、どの2辺のなす角も 60° です。内積の定義 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos 60^\circ$ からすべて等しく $\frac{1}{2}$ になります。この3つの内積の値は以降の小問でくり返し使うので、ここで確実に押さえておきましょう。
- (2) まずM, L, Gなどの点を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表します。MはABの中点、Lは $\triangle OAB$ の重心（これはOMを2:1に内分する点でもあります）です。OM $\perp$ CLを示すには $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CL} = 0$ を確かめます。 $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OC}$ と表して内積を展開し、(1)で求めた値を代入すると0になります。
- (3) 点Kを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表し、それが $\overrightarrow{OG}$ の実数倍になっていることを示します。NはOMの中点、Kは線分CNを4:1に内分する点なので、内分点の公式で順に表せます。 $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OG}$ の形が得られれば、3点O, K, Gは一直線上にあり、係数からOK:KG = 3:2が分かります。
- (4) これも各点を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表していく作業です。XはBCの内分点、YはOXの外分点である点に注意します。外分は内分比の一方を負にして扱えます。 $\overrightarrow{OZ}$ を求めたら、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{OZ}$ を(1)の内積の値を使って計算します。分数が多く現れるので、通分や約分の計算を丁寧に進めましょう。

4.4 採点

【第4問 17点】

配点は, (1) 3点 (2) 4点 (3) 4点 (4) 6点

5 第5問：座標空間とベクトル

5.1 問題

d を実数とする。O を原点とする座標空間上に、4 点

$$A(0, 2, 6), \quad B(-3, 0, 4), \quad C(-2, 3, 5), \quad D(-8, -1, d)$$

を定める。4 点 A, B, C, D は同一平面上にある。

また、座標空間上のベクトル $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ に対し、演算 $\vec{p} \times \vec{q}$ を

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_y q_z - p_z q_y, p_z q_x - p_x q_z, p_x q_y - p_y q_x)$$

と定め、 $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ とする。

- (1) d の値を求めよ。
- (2) $\vec{n}$ の成分を求め、 $\vec{n} \cdot \vec{AB} = \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ であることを確かめよ。
- (3) $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ とするとき、4 点 A, B, C, D を通る平面の方程式は、実数 w を用いて

$$n_x x + n_y y + n_z z + w = 0$$
 と表されることを示し、 w の値を求めよ。
- (4) 四面体 OABC の体積を求めよ。

5.2 解答

(1)

$$\vec{AB} = (-3, -2, -2), \quad \vec{AC} = (-2, 1, -1), \quad \vec{AD} = (-8, -3, d-6)$$

であり、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ の 2 つは一次独立である。点 D は 3 点 A, B, C と同一平面上に存在するため、

$$\vec{AD} = s\vec{AB} + t\vec{AC} = s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 s, t が存在する。上の式の x 成分と y 成分を比較して

$$\begin{cases} -3s - 2t = -8 \\ -2s + t = -3 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad s = 2 \quad \wedge \quad t = 1$$

が得られる。最後に z 成分を比較すると、 $-2s - t = d - 6$ が成り立ち、これを解いて $d = 1$ を得る。

(2) 与えられた式に則って $\vec{n}$ の成分を計算すると、

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-2) - (-3) \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

となり、これが求めるべき成分 $\vec{n} = (4, 1, -7)$ である。また、

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 4 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) + (-7) \cdot (-2) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-7) \cdot (-1) = 0$$

であることが分かる。

- (3) (2) と題意から、平面の方程式

$$4x + y - 7z + w = 0 \quad (5.1)$$

を考える。この平面が点 A を通るので、座標を (5.1) に代入して

$$4 \cdot 0 + 2 - 7 \cdot 6 + w = 0$$

すなわち $w = 40$ と求められる。これを (5.1) に代入して平面の方程式は

$$4x + y - 7z + 40 = 0$$

となり、これは 3 点 B, C, D の座標の値を代入しても成り立つため、4 点 A, B, C, D を通る平面の方程式である。

- (4) 点 O と平面の距離 ℓ は

$$\ell = \frac{|4 \cdot 0 + 0 - 7 \cdot 0 + 40|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{66}}$$

と求められる(注: 平面 $ax+by+cz+w=0$ と点 (x_0, y_0, z_0) の距離を $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+w|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で与えるこの公式は、高校では発展的な内容である)。次に、 $\triangle ABC$ の面積を求める。

$$\cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{6}} = \sqrt{\frac{6}{17}}$$

より $\sin \angle BAC = \sqrt{\frac{11}{17}}$ だから、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{11}{17}} = \frac{\sqrt{66}}{2}$$

したがって四面体 OABC の体積 V は、

$$V = \triangle ABC \cdot \ell \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{66}}{2} \cdot \frac{40}{\sqrt{66}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

である。

5.3 解説

空間座標における平面のとりえ方と、法線ベクトル・平面の方程式を扱う問題です。問題文で定義された演算 $\vec{p} \times \vec{q}$ は外積と呼ばれ、 $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の両方に垂直なベクトルを与えます(この事実は(2)で実際に確かめます)。平面に垂直なベクトルを法線ベクトルといい、これが分かると平面の方程式や点と平面の距離が計算できます。

- (1) 4 点 A, B, C, D が同一平面上にあることは、 $\vec{AD}$ が $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ の実数倍の和 $\vec{AD} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$ で表せることと同値です。成分ごとに等式を立てると、 x 成分と y 成分の 2 式から s, t が定まり、残った z 成分の式に代入すれば d が求まります。 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ が平行でない(一次独立である)ことが、この方法が使える前提です。

- (2) 定義された式にそって $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ の各成分を計算します。符号を含む引き算が多いので、

1成分ずつ落ちて計算しましょう。求めた $\vec{n}$ と $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の内積がどちらも 0 になることから, $\vec{n}$ がこの 2 つのベクトル (したがって平面全体) に垂直であること, つまり法線ベクトルであることが確かめられます。

- (3) 平面上の任意の点 X に対して $\overrightarrow{AX}$ は法線ベクトル $\vec{n}$ と垂直なので $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$ が成り立ち, これを成分で書き下すと $n_x x + n_y y + n_z z + w = 0$ の形になります。定数 w は, 平面が通る点 (ここでは A) の座標を代入すれば決まります。求めた方程式に B , C , D の座標を代入して成り立つことを確かめれば, 4 点すべてを通る平面だと確認できます。
- (4) 四面体 $OABC$ の体積は $\frac{1}{3} \times (\text{底面 } \triangle ABC \text{ の面積}) \times (\text{高さ})$ で求めます。底面を $\triangle ABC$ とすると, 高さは頂点 O から平面 ABC までの距離になり, (3) で求めた平面の方程式から点と平面の距離の公式で計算できます。底面積は, 内積から $\cos \angle BAC$ を求め, $\sin \angle BAC$ に直して $\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$ で求めます。 $\sqrt{66}$ がうまく約分され, 値が整理される点も確認しておきましょう。

5.4 採点

【第5問 17点】

配点は, (1) 4点 (2) 4点 (3) 4点 (4) 5点

6 第6問：斜交座標

6.1 問題

O を原点とする座標平面上に、X (1, 0), Y (0, 1), A (3, 2), B (1, 3) をとる。ある点 P が実数 p, q を用いて

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OX} + q\overrightarrow{OY} = (p, q)$$

と表されるとき、P の x 座標は p , y 座標は q であり、直線 OX は x 軸、直線 OY は y 軸上にある。また、ある点 S が実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

と表されるとき、この s を S の a 座標、 t を b 座標と定め、S を $(s, t)_{ab}$ と表記する。 b 座標が 0 の点の集合は直線を成し、それを a 軸、同様に a 座標が 0 の点の集合が成す直線を b 軸とし、 a 軸の正の方向は $\overrightarrow{OA}$ の方向、 b 軸の正の方向は $\overrightarrow{OB}$ の方向と定める。座標がどのような形になっているかを確認するために、2つの図を示した。図 6.1 は、 x 座標と y 座標のいずれかが整数である点を破線で表したもので、図 6.2 は、 a 座標と b 座標のいずれかが整数である点を破線で表したものである。

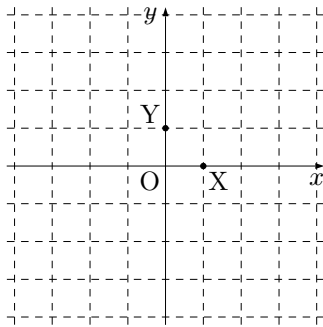


図 6.1

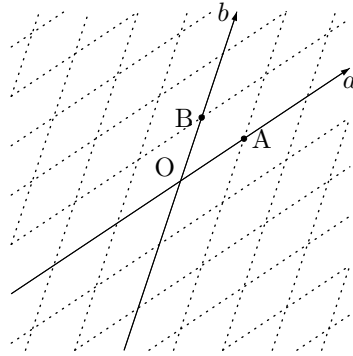


図 6.2

さて、上記議論において、ベクトルの係数を動かすときに点の動く範囲を考える。例として、実数 p, q が

$$2p + q \leq 2, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0$$

を満たすとき、 $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OX} + q\overrightarrow{OY}$ で定まる点 P の動きうる範囲 D_P を考える。これは、座標平面上で

$$2x + y \leq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

が表す領域と等しく、図 6.3 の塗りつぶし部分のようになる。ただし、境界を含む。この領域の形状は三角形であり、頂点は (0, 0), (1, 0), (0, 2) である。同じ p, q の条件で $\overrightarrow{OQ} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ で定まる点 Q の動きうる範囲 D_Q は、 $(0, 0)_{ab}$, $(1, 0)_{ab}$, $(0, 2)_{ab}$ を頂点とする三角形の境界を含む内側であり、図 6.4 の塗りつぶし部分のようになる。 D_P の面積を S_P , D_Q の面積を S_Q とし、

$$r = \frac{S_Q}{S_P}$$

とする。

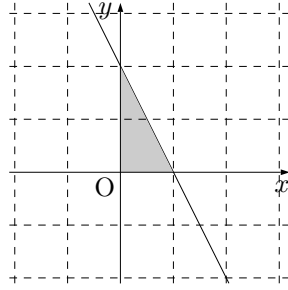


図 6.3

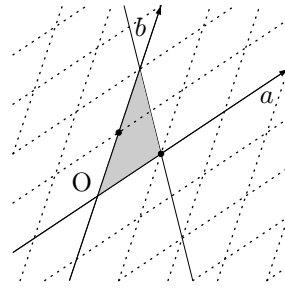


図 6.4

領域が三角形の上記例以外においても、 $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OX} + q\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OQ} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ で定められる点 P , Q が、同じ p, q の条件で動くとき、点 P が (p, q) を通るならば、点 Q が $(p, q)_{ab}$ を通る。また、その逆も成り立つ。そして、点 P, Q の動いてできる図形の面積がそれぞれ S'_P, S'_Q という正の実数値を持つとき、 $\frac{S'_Q}{S'_P} = r$ が成り立つ。

- (1) 実数 s, t について、 a 座標が s , b 座標が t である点 $S(s, t)_{ab}$ の x 座標と y 座標を s, t を用いて表せ。
- (2) r の値を求めよ。
- (3) 実数 s, t が

$$3s + 2t \leq 6, \quad s + t \geq 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

を満たしながら動くとき、 $\overrightarrow{OT} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定まる点 T の動きうる範囲を、図 6.2 を写した上に図示し、その面積を求めよ。

- (4) 実数 s, t が

$$s^2 + t^2 + 4s - 6t + 9 \leq 0$$

を満たしながら動くとき、 $\overrightarrow{OU} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定まる点 U の動きうる範囲を、図 6.2 を写した上に図示し、その面積を求めよ。

- (5) 実数 s, t が

$$(s+2)(s+1)(s-1) - t = 0$$

を満たしながら動くとき、 $\overrightarrow{OV} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で定まる点 V の動きうる範囲を、図 6.2 を写した上に図示せよ。

6.2 解答

元の座標平面を xy 平面、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が作る座標平面を ab 平面と記す。

- (1) 点 S について、

$$\overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ 2s+3t \end{pmatrix}$$

が成り立つから、 S の x 座標は $3s+t$, y 座標は $2s+3t$ である。

- (2) xy 平面上で $2x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ が表す領域 D_P は、文中の議論より 3 点 $(0, 0)$,

$(1, 0)$, $(0, 2)$ を頂点とする三角形の周及び内部で、その面積 S_P は

$$S_P = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

である。また、 ab 平面上で $2a + b \leq 2$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ が表す領域 D_Q は、文中の議論より3点

$$(0, 0)_{ab} = (0, 0), \quad (1, 0)_{ab} = (3 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = (3, 2),$$

$$(0, 2)_{ab} = (3 \cdot 0 + 2, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2) = (2, 6)$$

を頂点とする三角形の周及び内部である。 $Q_1(3, 2)$, $Q_2(2, 6)$ とすると、

$$\cos \angle Q_1 O Q_2 = \frac{\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2}}{|\overrightarrow{OQ_1}| |\overrightarrow{OQ_2}|} = \frac{18}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

より

$$\sin \angle Q_1 O Q_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \angle Q_1 O Q_2} = \frac{7}{\sqrt{130}}$$

のため、

$$S_Q = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle Q_1 O Q_2 \cdot |\overrightarrow{OQ_1}| \cdot |\overrightarrow{OQ_2}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{130}} \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{10} = 7$$

と求める。従って、

$$r = \frac{S_Q}{S_P} = \frac{7}{1} = 7$$

である。

(3) xy 平面上で、

$$3x + 2y \leq 6, \quad x + y \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

が表す領域を図示すると、図 6.5 の太線部分の周及び内部である。この面積 S'_P は

$$S'_P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

である。これを ab 平面で考えると、図 6.6 の太線部分の周及び内部となり、その面積 S'_Q は

題意より $\frac{S'_Q}{S'_P} = r$ を満たすから、

$$S'_Q = r \cdot S'_P = 7 \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{2}$$

である。

(4) xy 平面上で

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 \leq 4$$

が表す図形は、中心 $(-2, 3)$ 、半径 2 の円の周及び内部であり、図 6.7 のようになる。この面積 S'_P は

$$S'_P = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

である。これを ab 平面で考えると、図 6.8 の太線部分の周及び内部となり、その面積 S'_Q は

$$S'_Q = r \cdot S'_P = 7 \cdot 4\pi = 28\pi$$

である。

(5) xy 平面で

$$y = (x+2)(x+1)(x-1)$$

と表されるもの (図 6.9) を ab 平面上で考えれば良く, 特に $(-2, 0)_{ab}$, $(-1, 0)_{ab}$, $(0, -2)_{ab}$, $(1, 0)_{ab}$ を通ることに注意してグラフを描くと, 図 6.10 のようになる。

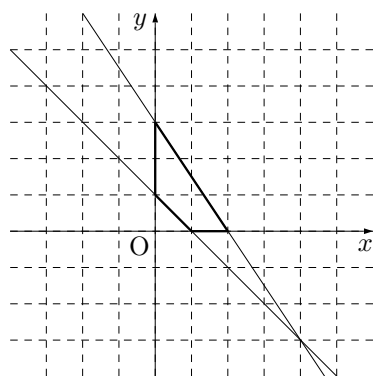


図 6.5

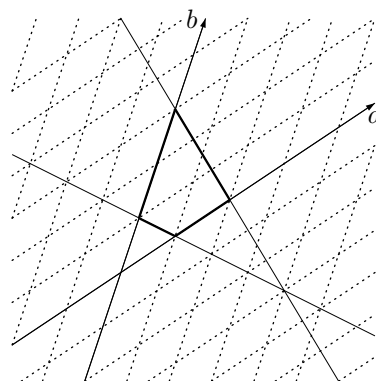


図 6.6

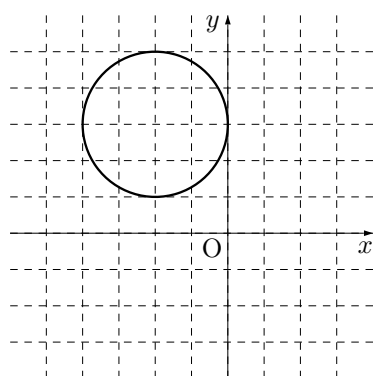


図 6.7

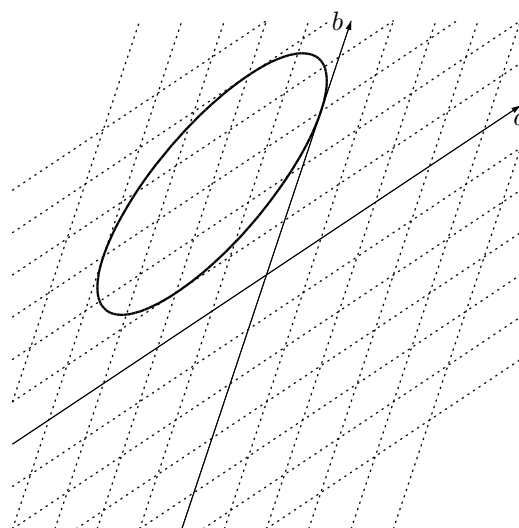


図 6.8

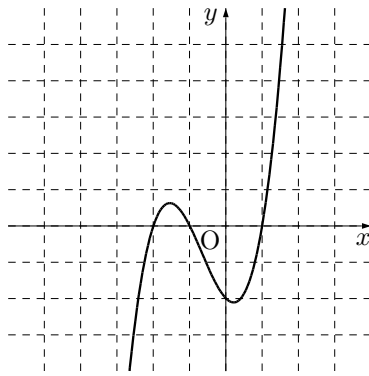


図 6.9

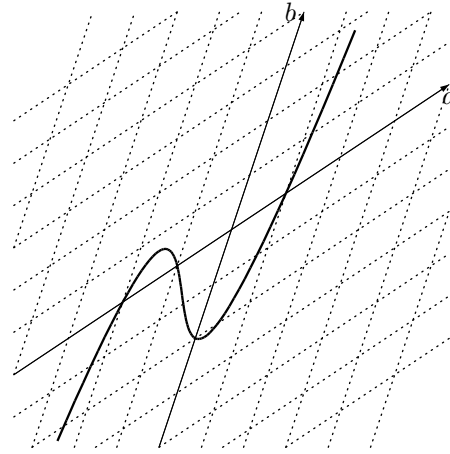


図 6.10

6.3 解説

2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を新たな座標軸ととらえ, xy 座標平面上の図形が ab 座標平面上でどう移り変わるかを考える問題です。点 S を $\overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ と表したときの (s, t) が, その点の ab 座標にあたります。(1) で得られる関係 $x = 3s + t$, $y = 2s + 3t$ は, ab 座標 (s, t) からもとの xy 座標 (x, y) への変換を与える式で, 以降の小問はすべてこの対応を軸に考えていきます。この変換のもとで面積が一定の倍率 r 倍になること ((2)) が本問の要で, (3) 以降はそれを使って計算を進めます。

- (1) 点 S を $\overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ と表し, $\overrightarrow{OA} = (3, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 3)$ を代入して成分を計算します。
 x 成分, y 成分をそれぞれ取り出すと, ab 座標 (s, t) から xy 座標 (x, y) への変換 $x = 3s + t$, $y = 2s + 3t$ が得られます。この関係が以降の小問で繰り返し使われます。

- (2) 一般に, $\triangle ABC$ の面積は, $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$ のとき

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2|$$

が成り立ちます。

$$\triangle OQ_1Q_2 = \frac{1}{2} |3 \cdot 6 - 2 \cdot 2| = 7$$

- (3) (2) で $r = 7$, すなわち xy 平面上の図形を ab 平面に移すと面積が 7 倍になることが分かりました。この倍率は図形の形によらず一定なので, あらためて ab 平面上で領域を作図しなくても, xy 平面上での面積 $S'_P = \frac{5}{2}$ を 7 倍するだけで ab 平面上の面積 $S'_Q = \frac{5}{2} \times 7 = \frac{35}{2}$ が求まります。 xy 平面側の領域は, 大きい三角形から小さい三角形を除いた形になっている点に注意して面積を計算しましょう。

- (4) x 座標, y 座標と a 座標 s , b 座標 t に対して

$$\begin{cases} x = 3s + t \\ y = 2s + 3t \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad s = \frac{3x - y}{7} \quad \wedge \quad t = \frac{3y - 2x}{7}$$

が成り立ちますから, これを s と t が満たす式に代入して整理すると,

$$13x^2 + 10y^2 - 18xy + 168x - 154y + 441 \leq 0$$

という、 x と y についての式が得られます。特に周が $(-4, 3)_{ab}$, $(0, 3)_{ab}$, $(-2, 1)_{ab}$, $(-2, 5)_{ab}$ を通ることに注意して楕円を描きましょう。

- (5) この曲線を ab 平面上で考える、すなわち ab 座標 (a, b) が $b = (a + 2)(a + 1)(a - 1)$ を満たす点の集合を、実際の xy 平面上に図示します。曲線そのものの式を xy の式に変換すると煩雑なので、概形をつかむために ab 座標での軸との交点に注目します。 $b = 0$ となるのは $a = -2, -1, 1$ のときで、 ab 座標 $(-2, 0)_{ab}$, $(-1, 0)_{ab}$, $(1, 0)_{ab}$ 、また $a = 0$ のときは $b = (0 + 2)(0 + 1)(0 - 1) = -2$ で $(0, -2)_{ab}$ です。これらの通過点を xy 座標 $(3a + b, 2a + 3b)$ に移して目印とし、曲線の概形を描きましょう。

6.4 採点

【第6問 16点】

配点は、(1) 2点 (2) 3点 (3) 4点 (4) 4点 (5) 3点