

確認試験問題

数列

(配点 100 点)

(日付) 年 月 日

(開始)

		:		
--	--	---	--	--

 ~ (90 分) ~

		:		
--	--	---	--	--

 (終了)

注意事項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 7 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 6 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 6 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 20)

n を自然数とする。 $\ell = 1, 2, 3, 4$ に対し, 1 から n までの n 個の整数を, それぞれ ℓ 乗した数の総和を $S_{\ell,n}$ で表す。すなわち,

$$S_{\ell,n} = \sum_{k=1}^n k^{\ell} \quad (\ell = 1, 2, 3, 4)$$

である。

- (1) $S_{1,n} = \frac{1}{2}n(n+1)$ を導き, その過程を簡潔に述べよ。
- (2) $S_{2,n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であることを, 数学的帰納法を用いて示せ。
- (3) $S_{3,n} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を導き, その過程を簡潔に述べよ。
- (4) $S_{4,n}$ を n の式で表せ。

第 2 問

(配点 18)

以下の和をそれぞれ求めよ。ただし、 n を自然数とする。

$$(1) \sum_{k=1}^n 2k(k+1)$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+3)(2k+7)}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1}$$

$$(4) \sum_{k=1}^{4n} k \sin \frac{k\pi}{2}$$

第 3 問

(配点 16)

各項が分数で表される数列 $\{a_n\}$ の各項を次の規則で定める。

- (i) a_1 の分母は 1, 分子は 1 である。ただし, 約分はしない。
- (ii) a_{n+1} は, a_n の分母と分子を比較し, 次のように決定する。ただし, 約分はしない。
 - (a) a_n の分母と分子が等しく k であるとき, a_{n+1} の分母は $k+1$, 分子は 1 である。
 - (b) a_n の分母 p と分子 q が異なるとき, a_{n+1} の分母は p , 分子は $q+1$ である。

例えば, $\{a_n\}$ の初項から第 10 項までを順に列挙すると

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$$

である。

- (1) 約分しない状態で, 分母が 77, 分子が 7 である分数 $\frac{7}{77}$ は $\{a_n\}$ の第何項であるか答えよ。
- (2) $\{a_n\}$ の第 777 項は何であるか, 約分しない状態で分母と分子を明らかにして答えよ。
- (3) $\{a_n\}$ の初項から第 777 項までの和を求めよ。

第 4 問

(配点 20)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ が次の漸化式によって定義されている。

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 4, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 13, \quad d_1 = 1,$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = -5a_n - 6 \\ b_{n+1} = 3b_n + 4n \\ c_{n+2} = 7c_{n+1} - 12c_n \\ d_{n+1} = d_n^2 + 1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
- (2) $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。
- (3) $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めよ。
- (4) すべての自然数 n について, d_n は 3 の倍数ではないことを示せ。

第 5 問

(配点 13)

n を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の、初項から第 n 項 a_n までの和 S_n が

$$S_n = (n+1)a_n + 2n^3 + 5n^2 + 3n - 120$$

を満たしている。

- (1) $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。
- (2) a_n を求めよ。
- (3) S_n を最大にする n の値と、そのときの最大値を求めよ。

第 6 問

(配点 13)

ある容器の中に、赤色の細菌と緑色の細菌がある。1 分ごとに、赤色の細菌は分裂して赤色の細菌 2 個と緑色の細菌 4 個になり、緑色の細菌は分裂して赤色の細菌 3 個と緑色の細菌 1 個になる。時刻 0 分のときに、容器の中には赤色の細菌が 2 個、緑色の細菌が 1 個入っており、これら 3 個の細菌は、時刻 1 分のときに初めて分裂が起こるとする。細菌は容器から出ないものとし、自然数 n について、時刻 n 分のときの容器内の赤色の細菌の個数を a_n 、緑色の細菌の個数を b_n とする。例えば、時刻 1 分のときを具体的に考えると、 $a_1 = 7$ 、 $b_1 = 9$ である。

- (1) a_{n+1} と b_{n+1} を、 a_n 、 b_n で表せ。
- (2) a_n 、 b_n を求めよ。
- (3) m を自然数とする。時刻 m 分において、赤色の細菌の方が緑色の細菌より個数が多いとすると、 m が満たすべき必要十分条件を求めよ。