
確 認 試 験 問 題

数 列

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：数列の和と証明

1.1 問題

n を自然数とする。 $\ell = 1, 2, 3, 4$ に対し、1 から n までの n 個の整数を、それぞれ ℓ 乗した数の総和を $S_{\ell,n}$ で表す。すなわち、

$$S_{\ell,n} = \sum_{k=1}^n k^{\ell} \quad (\ell = 1, 2, 3, 4)$$

である。

- (1) $S_{1,n} = \frac{1}{2}n(n+1)$ を導き、その過程を簡潔に述べよ。
- (2) $S_{2,n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であることを、数学的帰納法を用いて示せ。
- (3) $S_{3,n} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を導き、その過程を簡潔に述べよ。
- (4) $S_{4,n}$ を n の式で表せ。

1.2 解答

- (1) 和を考える式を、各項を数の昇順および降順にして、2 通りで表す。

$$S_{1,n} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

$$S_{1,n} = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

上の2式を辺々足す。特に右辺は1項目同士、2項目同士、...と足していくと、

$$2S_{1,n} = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

となり、この右辺は $n+1$ が n 項の和であるから、

$$2S_{1,n} = n(n+1)$$

である。従って、

$$S_{1,n} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

となる。

- (2) 与式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1.1}$$

を数学的帰納法により示す。

- (i) $n = 1$ のとき、(1.1)の左辺は1、右辺は $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ だから (1.1)は成り立つ。
- (ii) $n = k$ のとき、(1.1)が成り立つと仮定すると、

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \tag{1.2}$$

である。(1.2)を用いて $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$ を計算すると、

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\} \\
&= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}
\end{aligned}$$

となり、これは $n = k + 1$ のときも (1.1) が成り立つことを表している。

(i), (ii) より、すべての自然数 n について (1.1) が成り立つ。

(3) 恒等式

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

において、 k に 1 から n までの自然数を代入し、辺々足すと

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

である。 $\sum_{k=1}^n k^3$ の項以外を n の式で表し、これを整理する。

$$\begin{aligned}
4 \sum_{k=1}^n k^3 &= (n+1)^4 - 1 - 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\
&= (n+1)\{(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\} \\
&= n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

ゆえに、次の等式を得る。

$$S_{3,n} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(4) 恒等式

$$(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

において、 k に 1 から n までの自然数を代入し、辺々足すと

$$(n+1)^5 - 1^5 = \sum_{k=1}^n 5k^4 + \sum_{k=1}^n 10k^3 + \sum_{k=1}^n 10k^2 + \sum_{k=1}^n 5k + \sum_{k=1}^n 1$$

である。 $\sum_{k=1}^n k^4$ の項以外を n の式で表し、これを整理する。

$$\begin{aligned}
5 \sum_{k=1}^n k^4 &= (n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{10}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n \\
&= \frac{1}{6}(n+1)\{6(n+1)^4 - 6 - 15n^2(n+1) - 15n - 10n(2n+1)\} \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)
\end{aligned}$$

ゆえに、 $S_{4,n}$ は次の通り。

$$S_{4,n} = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

1.3 解説

$1^\ell + 2^\ell + \cdots + n^\ell$ という冪乗の和を求める問題です。 $S_{1,n}$ から $S_{3,n}$ は教科書に載っている公式ですが、ここでは導き方そのものを身につけることが目的です。同じ方法を使えば、公式が知られていない $S_{4,n}$ も求められます。代表的な導出法として、次の2つを押さえておきましょう。

- 数列を昇順と降順の2通りに書いて辺々加える方法。
 - 恒等式 $(k+1)^m - k^m$ を $k=1$ から n まで足し合わせ、左辺を $(n+1)^m - 1$ に、右辺を既知の和に帰着させる方法。
- (1) $S_{1,n}$ を昇順と降順に2通り書いて辺々加えると、各項の和がすべて $n+1$ になり、それが n 個あるので $2S_{1,n} = n(n+1)$ となります。いわゆるガウスの方法です。
 - (2) 数学的帰納法で示します。 $n=1$ で成り立つことを確認し、 $n=k$ での成立を仮定して両辺に $(k+1)^2$ を足し、 $(k+1)$ でくくって公式の $n=k+1$ の形に一致させます。
 - (3) 恒等式 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ を $k=1$ から n まで足すと、左辺は途中が打ち消し合って $(n+1)^4 - 1$ になります。右辺に現れる $S_{3,n}$ 以外の和 ($S_{2,n}$, $S_{1,n}$, 項数の和) は既知なので、それらを代入して $S_{3,n}$ について解きます。
 - (4) (3) と同じ発想で、今度は恒等式 $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ を $k=1$ から n まで足します。 $S_{4,n}$ 以外の和はすべて求まっているので、それらを代入して $S_{4,n}$ を求めます。公式を暗記するのではなく、方法を反復することで得られる点がこの問題のねらいです。

1.4 採点

【第1問 20点】

- (1) 4点
 - 逆順に計算する事で解答を得られているか。
- (2) 6点
 - $n=1$ の場合を示しているか。
 - $n=k$ の場合を仮定して $n=k+1$ の場合を示しているか。
- (3) 5点
 - 恒等式を両辺で足し合わせて $\sum_{k=1}^n k^3$ を含む等式を導けたか。
- (4) 5点
 - (3) と同じように、 $\sum_{k=1}^n k^4$ を含む等式を導けたか。
 - 最終的な解に因数分解の有無は問わない。

2 第2問：数列の和の計算

2.1 問題

以下の和をそれぞれ求めよ。ただし、 n を自然数とする。

$$(1) \sum_{k=1}^n 2k(k+1)$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+3)(2k+7)}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1}$$

$$(4) \sum_{k=1}^{4n} k \sin \frac{k\pi}{2}$$

2.2 解答

(1)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= 2 \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+7} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+7} \right) \\ &= \frac{3}{35} - \frac{n+3}{(2n+5)(2n+7)} \\ &= \frac{n(12n+37)}{35(2n+5)(2n+7)} \end{aligned}$$

(3) 与式を S とおく。 S と $2S$ を書き表すと次の通り。

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} \quad (2.1)$$

$$2S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n \quad (2.2)$$

(2.1)から (2.2)を両辺引いて

$$-S = 1 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - n \cdot 2^n$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} - n \cdot 2^n \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} - n \cdot 2^n \\
&= -(n-1) \cdot 2^n - 1
\end{aligned}$$

である。ゆえに与式 S は

$$S = (n-1) \cdot 2^n + 1$$

である。

- (4) $a_k = k \sin \frac{k\pi}{2}$ とする。各項を、自然数 m を用いて第 $4m-3$ 項, 第 $4m-2$ 項, 第 $4m-1$ 項, 第 $4m$ 項に分けると,

$$\begin{cases} a_{4m-3} = (4m-3) \sin \frac{(4m-3)\pi}{2} = (4m-3) \sin \left(2m\pi - \frac{3}{2}\pi \right) = 4m-3 \\ a_{4m-2} = (4m-2) \sin \frac{(4m-2)\pi}{2} = (4m-2) \sin(2m-1)\pi = 0 \\ a_{4m-1} = (4m-1) \sin \frac{(4m-1)\pi}{2} = (4m-1) \sin \left(2m\pi - \frac{1}{2}\pi \right) = -4m+1 \\ a_{4m} = 4m \sin 2m\pi = 0 \end{cases}$$

$(m = 1, 2, \dots, n)$

となる。よって

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{m=1}^n a_{4m-3} + \sum_{m=1}^n a_{4m-2} + \sum_{m=1}^n a_{4m-1} + \sum_{m=1}^n a_{4m} \\
&= \sum_{m=1}^n (4m-3) + \sum_{m=1}^n (-4m+1) \\
&= \sum_{m=1}^n (4m-3-4m+1) \\
&= \sum_{m=1}^n (-2) \\
&= -2n
\end{aligned}$$

である。

2.3 解説

(1) の別解)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n 2k(k+1) &= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\
&= \frac{2}{3} n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

(1) および (2) は項の相殺で計算を単純にします。(1) は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\
&= (\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} - 0 \cdot 1 \cdot 2) + (\cancel{2 \cdot 3 \cdot 4} - \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3}) + \dots
\end{aligned}$$

$$+ \{(\cancel{n-1})n(\cancel{n+1}) - (\cancel{n-2})(\cancel{n-1})n\} + \{n(n+1)(n+2) - (\cancel{n-1})n(\cancel{n+1})\}$$

(2) は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+7} \right) \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \cdots \\ & \quad + \left(\frac{1}{\cancel{2n-1}} - \frac{1}{\cancel{2n+3}} \right) + \left(\frac{1}{\cancel{2n+1}} - \frac{1}{2n+5} \right) + \left(\frac{1}{\cancel{2n+3}} - \frac{1}{2n+7} \right) \end{aligned}$$

(3) の項をずらして差をとる方法は頻出です。

2.4 採点

【第2問 18点】

- (1) 4点
- (2) 5点
- (3) 5点
- (4) 4点

3 第3問：群数列

3.1 問題

各項が分数で表される数列 $\{a_n\}$ の各項を次の規則で定める。

- (i) a_1 の分母は 1, 分子は 1 である。ただし, 約分はしない。
- (ii) a_{n+1} は, a_n の分母と分子を比較し, 次のように決定する。ただし, 約分はしない。
 - (a) a_n の分母と分子が等しく k であるとき, a_{n+1} の分母は $k+1$, 分子は 1 である。
 - (b) a_n の分母 p と分子 q が異なるとき, a_{n+1} の分母は p , 分子は $q+1$ である。

例えば, $\{a_n\}$ の初項から第 10 項までを順に列挙すると

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$$

である。

- (1) 約分しない状態で, 分母が 77, 分子が 7 である分数 $\frac{7}{77}$ は $\{a_n\}$ の第何項であるか答えよ。
- (2) $\{a_n\}$ の第 777 項は何であるか, 約分しない状態で分母と分子を明らかにして答えよ。
- (3) $\{a_n\}$ の初項から第 777 項までの和を求めよ。

3.2 解答

第 n 群が n 項の数列になるように, 数列を群に分ける。

$$\left| \frac{1}{1} \right| \left| \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right| \left| \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \right| \left| \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right| \cdots \left| \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right| \cdots$$

第 n 群の最後の項を元の数列の第 L_n 項とすると,

$$\begin{aligned} L_n &= (\text{第 1 群の項数}) + (\text{第 2 群の項数}) + \cdots + (\text{第 } n \text{ 群の項数}) \\ &= 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

であり, 第 n 群に属する項の総和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{2}(n+1)$$

である。

- (1) $\frac{7}{77}$ は, 第 77 群の 7 項目の数である。第 76 群の最後の項が, 元の数列の第 $L_{76} = \frac{1}{2} \cdot 76 \cdot 77 = 2926$ 項であるから, $\frac{7}{77}$ はその 7 項後で, 元の数列の第 2933 項である。
- (2) $L_{38} = 741$, $L_{39} = 780$ より, $L_{38} < 777 < L_{39}$ だから, 第 777 項は第 39 群にあり, その $777 - 741 = 36$ 項目である。ゆえにこの項は $\frac{36}{39}$ である。

- (3) 第 777 項は第 39 群の 36 項目だから、初項から第 777 項目までの和は、第 1 群から第 38 群の項の総和と、第 39 群の 1 項目から 36 項目までの和を足し合わせたもので、その和 E は

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^{38} S_k + \sum_{k=1}^{36} \frac{k}{39} \\ &= \sum_{k=1}^{38} \frac{1}{2}(k+1) + \frac{1}{39} \sum_{k=1}^{36} k \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{38 \cdot 39}{2} + 38 \right) + \frac{1}{39} \cdot \frac{36 \cdot 37}{2} \\ &= \frac{10571}{26} \end{aligned}$$

である。

3.3 解説

分数が規則的に並ぶ群数列の問題です。群数列では、数列を適切な「群」に区切り、次の 3 つを一般化しておくのが定石です。

- 第 n 群の項数。
- 第 n 群の末項が、元の数列の第何項にあたるか（区切りの累積）。
- 第 n 群に属する項の総和。

この数列は、分母が n の分数 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ を第 n 群とすると、第 n 群は n 項からなります。第 n 群の末項は元の数列の第 $L_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 項、第 n 群の総和は $\frac{1}{2}(n+1)$ と求まります。

- (1) $\frac{7}{77}$ は分母が 77 なので第 77 群の 7 番目です。第 76 群の末項が元の数列の第 L_{76} 項なので、その 7 つ後が答えの項番号になります。
- (2) $L_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ が 777 をまたぐ n を探します。 $L_{38} = 741$, $L_{39} = 780$ なので $L_{38} < 777 \leq L_{39}$ より第 777 項は第 39 群にあり、その $777 - 741 = 36$ 番目なので $\frac{36}{39}$ です。何群の何番目かを特定するのが要点です。
- (3) 第 777 項は第 39 群の 36 番目なので、求める和は「第 1 群から第 38 群までの総和」と「第 39 群の 1 番目から 36 番目までの和」に分けて足します。前者は各群の総和 $\frac{1}{2}(k+1)$ を $k=1$ から 38 まで足したもので、後者は $\sum_{k=1}^{36} \frac{k}{39}$ で、どちらも和の公式で計算できます。群ごとの総和をあらかじめ求めておくと見通しよく処理できます。

3.4 採点

【第 3 問 16 点】

- (1) 5 点

- 第 n 群の最後の項が元の数列の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項であることを求められているか、それか

ら答えを求められているか。

(2) 5点

- (1)と同様。

(3) 6点

- 第 n 群に属する項の総和を $\frac{1}{2}(n+1)$ と求められているか、それを用いて答えを求められているか。

4 第4問：数列と漸化式

4.1 問題

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ が次の漸化式によって定義されている。

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 4, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 13, \quad d_1 = 1,$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = -5a_n - 6 \\ b_{n+1} = 3b_n + 4n \\ c_{n+2} = 7c_{n+1} - 12c_n \\ d_{n+1} = d_n^2 + 1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
- (2) $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。
- (3) $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めよ。
- (4) すべての自然数 n について、 d_n は 3 の倍数ではないことを示せ。

4.2 解答

- (1) $\{a_n\}$ の漸化式を変形すると

$$a_{n+1} = -5a_n - 6$$

$$\iff a_{n+1} + 1 = -5(a_n + 1)$$

となるから、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項が $a_1 + 1 = 4$ 、公比が -5 の等比数列である。これを式で表すと

$$a_n + 1 = 4 \cdot (-5)^{n-1}$$

となり、整理すると a_n は次のようになる。

$$a_n = 4 \cdot (-5)^{n-1} - 1$$

- (2) $\{b_n\}$ の漸化式を変形すると

$$b_{n+1} = 3b_n + 4n$$

$$\iff b_{n+1} + 2(n+1) + 1 = 3(b_n + 2n + 1)$$

となるから、数列 $\{b_n + 2n + 1\}$ は初項 $b_1 + 2 + 1 = 7$ 、公比が 3 の等比数列である。これを式で表すと

$$b_n + 2n + 1 = 7 \cdot 3^{n-1}$$

となり、整理すると b_n は次のようになる。

$$b_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$$

- (3) $\{c_n\}$ についての漸化式を変形し、2 通りで表す。

$$c_{n+2} - 3c_{n+1} = 4(c_{n+1} - 3c_n) \tag{4.1}$$

$$c_{n+2} - 4c_{n+1} = 3(c_{n+1} - 4c_n) \tag{4.2}$$

(4.1)より、数列 $\{c_{n+1} - 3c_n\}$ は初項が $c_2 - 3c_1 = 7$ 、公比が 4 の等比数列である。これを式で表すと

$$c_{n+1} - 3c_n = 7 \cdot 4^{n-1} \quad (4.3)$$

である。また、(4.2)より、数列 $\{c_{n+1} - 4c_n\}$ は初項が $c_2 - 4c_1 = 5$ 、公比が 3 の等比数列である。これを式で表すと

$$c_{n+1} - 4c_n = 5 \cdot 3^{n-1} \quad (4.4)$$

である。(4.3)から(4.4)を両辺引いて c_{n+1} を消去すると、

$$c_n = 7 \cdot 4^{n-1} - 5 \cdot 3^{n-1}$$

が得られる。

(4) 命題 P 「 d_n は 3 で割り切れない。」を数学的帰納法によって示す。

(i) $n = 1$ のとき、 $d_1 = 1$ は 3 で割り切れないため、 P は成り立つ。

(ii) $n = k$ のときに P が成り立つとする。このとき、 d_k は整数 m を用いて $d_k = 3m + 1$ または $d_k = 3m + 2$ と表すことができる。 $d_k = 3m + 1$ のとき、

$$d_{k+1} = (3m + 1)^2 + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 2$$

は 3 で割り切れない。 $d_k = 3m + 2$ のとき、

$$d_{k+1} = (3m + 2)^2 + 1 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 2$$

は 3 で割り切れない。したがって、いずれの場合においても d_{k+1} は 3 で割り切れないため、 $n = k + 1$ で P が成り立つ。

以上より、命題 P が示された。

4.3 解説

さまざまな型の漸化式から一般項を求めたり、性質を示したりする問題です。漸化式は型ごとに定石があるので、どの型かを見極めることが第一歩です。

- $a_{n+1} = pa_n + q$ 型は、 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ となる α (不動点) を引いて等比数列に直す。
 - 隣接 3 項間 $c_{n+2} = pc_{n+1} + qc_n$ 型は、特性方程式の 2 解を用いて 2 通りの等比数列に分解する。
 - 非線形な漸化式では一般項を求めず、数学的帰納法や余り (合同) で性質を追う。
- (1) $a_{n+1} = -5a_n - 6$ は $a_{n+1} = pa_n + q$ 型です。 $\alpha = -5\alpha - 6$ を解いた $\alpha = -1$ を引くと $a_{n+1} + 1 = -5(a_n + 1)$ となり、 $\{a_n + 1\}$ が公比 -5 の等比数列になります。
- (2) $b_{n+1} = 3b_n + 4n$ は、右辺に n の 1 次式を含む型です。 $b_n + (n$ の 1 次式) が等比数列になるように、 $b_n + 2n + 1$ を作ります ($2n + 1$ の係数は、漸化式に代入して両辺が合うように決めます)。 $\{b_n + 2n + 1\}$ が公比 3 の等比数列になります。
- (3) 隣接 3 項間漸化式です。特性方程式 $x^2 - 7x + 12 = 0$ の解 3, 4 を使い、 $c_{n+2} - 3c_{n+1} = 4(c_{n+1} - 3c_n)$ と $c_{n+2} - 4c_{n+1} = 3(c_{n+1} - 4c_n)$ の 2 通りに変形します。それぞれから $\{c_{n+1} - 3c_n\}$ 、 $\{c_{n+1} - 4c_n\}$ という 2 つの等比数列が得られ、 c_{n+1} を消去すれば c_n が求ま

ります。

- (4) $d_{n+1} = d_n^2 + 1$ は非線形で一般項は求まりません。そこで「3 で割り切れない」ことを数学的帰納法で示します。 d_k を $3m+1$, $3m+2$ の場合に分け、それぞれ $d_{k+1} = d_k^2 + 1$ の3 で割った余りを計算するとどちらも2 になり、3 の倍数でないことが従います。これは3 で割った余り（合同式）で考える発想です。

4.4 採点

【第4問 20点】

- (1) 5点
- (2) 5点
- (3) 5点
- (4) 5点

5 第5問：和と数列

5.1 問題

n を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の、初項から第 n 項 a_n までの和 S_n が

$$S_n = (n+1)a_n + 2n^3 + 5n^2 + 3n - 120$$

を満たしている。

- (1) $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。
- (2) a_n を求めよ。
- (3) S_n を最大にする n の値と、そのときの最大値を求めよ。

5.2 解答

- (1) 与式において n に $n+1$ を代入したもの

$$S_{n+1} = (n+2)a_{n+1} + 2(n+1)^3 + 5(n+1)^2 + 3(n+1) - 120$$

から与式を両辺引き、 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \{(n+2)a_{n+1} + 2(n+1)^3 + 5(n+1)^2 + 3(n+1) - 120\} \\ &\quad - \{(n+1)a_n + 2n^3 + 5n^2 + 3n - 120\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

となる。これを整理すると

$$\begin{aligned} (5.1) \quad &\Longleftrightarrow -(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 2(3n^2 + 3n + 1) + 5(2n+1) + 3 \\ &\Longleftrightarrow -(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 6n^2 + 16n + 10 \\ &\Longleftrightarrow -(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 2(n+1)(3n+5) \\ &\Longleftrightarrow a_{n+1} - a_n = -2(3n+5) \end{aligned}$$

となる。階差数列の定義 $b_n = a_{n+1} - a_n$ より、

$$b_n = -2(3n+5) = -6n - 10$$

である。

- (2) 与式において $n=1$ とし、 $S_1 = a_1$ であることを用いると、

$$a_1 = (1+1)a_1 + 2 + 5 + 3 - 120$$

となる。これを a_1 について解くと

$$a_1 = 110$$

である。よって a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 110 + \sum_{k=1}^{n-1} (-6k - 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 110 - \frac{6}{2}n(n-1) - 10(n-1) \\
 &= -3n^2 - 7n + 120
 \end{aligned}$$

である。この式は $n = 1$ のときも正しい。

- (3) (2) で得られた a_n の式は、 n , n^2 の係数が負である 2 次式のため、自然数 n の増加によって a_n は減少することが分かる。 a_n が初めて負となる n の値を探すと、

$$\begin{aligned}
 a_5 &= -3 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 + 120 = 10 \\
 a_6 &= -3 \cdot 6^2 - 7 \cdot 6 + 120 = -30
 \end{aligned}$$

より $a_5 > 0$, $a_6 < 0$ であるから、 $n = 6$ で初めて a_n が負になる。よって a_n は $n \leq 5$ で正、 $n \geq 6$ で負であり、正の値のみを足し合わせた S_5 が S_n の最大値である。つまり、 S_n を最大にする n の値は 5 である。その最大値は

$$\begin{aligned}
 S_5 &= \sum_{k=1}^5 a_k \\
 &= \sum_{k=1}^5 (-3k^2 - 7k + 120) \\
 &= -\frac{3}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 - \frac{7}{2} \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 120 \\
 &= -165 - 105 + 600 \\
 &= 330
 \end{aligned}$$

である。

5.3 解説

和 S_n と一般項 a_n の関係は、 $n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n = 1$ のとき $a_1 = S_1$ です。また階差数列 $\{b_n\}$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) が分かっているときの一般項は、 $n \geq 2$ で

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

と表せます。この式は $n = 1$ では和の部分が空になるので別扱いですが、求めた式が $n = 1$ でも成り立つことを確かめておくと安心です。

- (1) 与えられた関係式は S_n についての式なので、そのままでは a_n を直接扱えません。そこで n を $n+1$ に置き換えた式を作り、辺々を引いて $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ を用いると、 S が消えて a_n の漸化式が得られます。整理の際は右辺を $(n+1)$ で括れる形にまとめると、両辺を $(n+1)$ で割って $a_{n+1} - a_n$ の形、すなわち階差数列 b_n がすっきり求まります。展開後の係数計算でミスしやすいので、 $2(n+1)^3$ などは丁寧に展開しましょう。

- (2) 一般項 a_n は、初項 a_1 と (1) で求めた階差 b_n から $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ で求めます。初項 a_1 は

与式で $n = 1$ とし、 $S_1 = a_1$ を使えば得られます。 $\sum_{k=1}^{n-1}$ は上端が $n-1$ である点に注意してください (n ではありません)。最後に、得られた式が $n = 1$ のときも a_1 の値と一致することを

確認しておきます。

- (3) S_n を最大にするのは、正の項をすべて足し終えた時点、つまり a_n が正から負に変わる直前までの和です。(2) の a_n は上に凸の2次式で n の増加とともに減少するので、 $a_n > 0$ となる最大の n を探せばよく、具体的に a_5 と a_6 を計算して符号が切り替わる箇所を見つけます。

$a_5 > 0$, $a_6 < 0$ なので S_5 が最大です。なお最大値 S_5 は $\sum_{k=1}^5 a_k$ を $\sum k^2$, $\sum k$ の公式で計算しても、 a_1 から a_5 を直接足しても求められます。 $a_n = 0$ となる自然数 n が存在する場合は、その項を足しても和が変わらないため答えの n が2通りになり得る点も覚えておきましょう。

5.4 採点

【第5問 13点】

6 第6問：連立漸化式

6.1 問題

ある容器の中に、赤色の細菌と緑色の細菌がある。1 分ごとに、赤色の細菌は分裂して赤色の細菌 2 個と緑色の細菌 4 個になり、緑色の細菌は分裂して赤色の細菌 3 個と緑色の細菌 1 個になる。時刻 0 分のときに、容器の中には赤色の細菌が 2 個、緑色の細菌が 1 個入っており、これら 3 個の細菌は、時刻 1 分のときに初めて分裂が起こるとする。細菌は容器から出ないものとし、自然数 n について、時刻 n 分のときの容器内の赤色の細菌の個数を a_n 、緑色の細菌の個数を b_n とする。例えば、時刻 1 分のときを具体的に考えると、 $a_1 = 7$ 、 $b_1 = 9$ である。

- (1) a_{n+1} と b_{n+1} を、 a_n 、 b_n で表せ。
- (2) a_n 、 b_n を求めよ。
- (3) m を自然数とする。時刻 m 分において、赤色の細菌の方が緑色の細菌より個数が多いとするとき、 m が満たすべき必要十分条件を求めよ。

6.2 解答

- (1) 時刻 $n+1$ 分になるとき、赤色の細菌は、 a_n 個の赤色の細菌からそれぞれ 2 個ずつ、 b_n 個の緑色の細菌からそれぞれ 3 個ずつ発生するから、次の式が成り立つ。

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad (6.1)$$

また、緑色の細菌は、 a_n 個の赤色の細菌からそれぞれ 4 個ずつ、 b_n 個の緑色の細菌からそれぞれ 1 個ずつ発生するから、次の式が成り立つ。

$$b_{n+1} = 4a_n + b_n \quad (6.2)$$

(6.1)、(6.2)が求める式である。

- (2) (6.1) – (6.2) より、

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -2(a_n - b_n)$$

である。従って、数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項が $a_1 - b_1 = -2$ 、公比が -2 の等比数列だから、

$$a_n - b_n = -2 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n \quad (6.3)$$

である。また、(6.1) + $\frac{3}{4}$ × (6.2) より、

$$a_{n+1} + \frac{3}{4}b_{n+1} = 5 \left(a_n + \frac{3}{4}b_n \right)$$

である。従って、数列 $\left\{ a_n + \frac{3}{4}b_n \right\}$ は初項が $a_1 + \frac{3}{4}b_1 = \frac{55}{4}$ 、公比が 5 の等比数列だから、

$$a_n + \frac{3}{4}b_n = \frac{55}{4} \cdot 5^{n-1} = \frac{11}{4} \cdot 5^n \quad (6.4)$$

である。(6.3)、(6.4)を連立して a_n 、 b_n について解くと、

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{7} \{ 11 \cdot 5^n + 3 \cdot (-2)^n \} \\ b_n = \frac{1}{7} \{ 11 \cdot 5^n - (-2)^{n+2} \} \end{cases}$$

である。

- (3) (6.3)より, $a_m - b_m = (-2)^m$ であり, $a_m > b_m$ すなわち $a_m - b_m > 0$ となる m の必要十分条件は, 「 m が偶数であること」である。

6.3 解説

- (1) 文章をよく読み, 具体的に状況を書き起こしてみると立式しやすいです。数字だけを見て, a_{n+1} を $2a_n + 4b_n$, b_{n+1} を $3a_n + b_n$ と間違えないように注意してください。
- (2) 二つの数列 a_n , b_n の漸化式の解法として, まず $a_n + kb_n$ が等比数列となるような k を探します。(6.1)に, (6.2)の両辺を k 倍した式を辺々加えると,

$$a_{n+1} + kb_{n+1} = (2 + 4k)a_n + (3 + k)b_n = (2 + 4k) \left(a_n + \frac{3+k}{2+4k} b_n \right)$$

となり, これが等比数列となる k は, $k = \frac{3+k}{2+4k}$ で与えられ, これを解いた $k = -1$, $k = \frac{3}{4}$ を代入すると, (6.3), (6.4)が得られます。

- (3) a_m と b_m の大小関係を考えますが, (6.3)で $a_m - b_m$ の形をしているので, これを用いると $(-2)^m$ の正負を考えれば良いことが分かります。

6.4 採点

【第6問 13点】

- (1) 4点
- 正しく立式できたか。
- (2) 6点
- $a_n + kb_n$ が等比数列となるような k を見つけ, 式を変形できたか。
 - 漸化式を解けたか。
- (3) 3点
- $(-2)^m$ の正負の問題に帰着できたか。