

# 確 認 試 験 問 題

## 積 分 法 の 考 え

(配点 100 点)

(日付)                      年              月              日

(開始) 

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

 ~ (90 分) ~ 

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

 (終了)

### 注 意 事 項

1. 上の日付の欄に，試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に，試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を，それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは，原則として認められません。
4. 試験時間中は，アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで，この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 8 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば，監督者に知らせなさい。
7. この試験は 7 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 7 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には，黒色鉛筆か，または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に，試験名，氏名，学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに，解答欄が指定されています。解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は，書き込みに関しては自由に使用してもよいが，どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は，やむを得ない場合を除き，退場してはいけません。
14. 試験後は，問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

## 第 1 問

(配点 14)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1) 関数  $f(x)$  が,  $f'(x) = -3x^2 + 10x - 8$ ,  $f(2) = -5$  を満たすとき,  $f(x)$  を求めよ。

(2) 定積分  $\int_{-4}^5 (x^2 + 2x + 3) dx$  を求めよ。

(3) 定積分  $\int_0^2 |x^2 - x| dx$  を求めよ。

## 第 2 問

(配点 14)

座標平面上の曲線および直線に囲まれる図形の面積を考える。以下の問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 次の 4 つの曲線および直線に囲まれる図形の面積を求めよ。

$$y = x^2 - 3x + 3, \quad y = x - 2, \quad y \text{ 軸}, \quad x = 3$$

- (2) 次の 2 つの曲線に囲まれる図形の面積を求めよ。

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{11}{2}, \quad y = -2x^2 + 8x - 5$$

### 第 3 問

(配点 16)

座標平面上に、放物線

$$C: y = x^2 + 2x - 1$$

と、 $C$  上の点  $P(-3, 2)$  における接線  $D$  を定める。 $t$  を  $t \neq -3$  を満たす実数とし、 $C$ 、 $D$  および直線  $x = t$  で囲まれる図形の面積を  $S(t)$  とおく。

以下の問いに答えよ。必要であれば、不定積分に関する次の式を用いてもよい。ただし、 $n$  を自然数、 $a$  を 0 でない実数、 $b$  を実数とする。

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax + b)^{n+1} + K \quad (K \text{ は積分定数})$$

- (1)  $t < -3$  と  $t > -3$  のそれぞれの場合について、 $S(t)$  を  $t$  で表せ。
- (2)  $S(t) = 2$  となる  $t$  の値を求めよ。
- (3)  $t > -3$  とし、 $C$  と直線  $x = t$  の交点を  $Q$  とする。線分  $PQ$  と  $C$  が囲む図形の面積を  $U(t)$  とおくと、 $\frac{U(t)}{S(t)}$  の値は  $t$  にらず一定になることを示し、その値を求めよ。

#### 第 4 問

(配点 14)

$a, b$  を  $a > b$  を満たす定数とし、座標平面上に、放物線  $C: y = -x^2 + 3x$  を定める。 $C$  と  $x$  軸が囲む図形の面積が、2 直線  $y = ax, y = bx$  によって 3 等分されるとき、 $a, b$  の値を求めよ。

## 第 5 問

(配点 14)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 次の等式を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

$$f(x) = \int_0^2 (t-x)f(t) dt + 3$$

- (2) 次の等式を満たす関数  $g(x)$  および定数  $c$  の値を求めよ。

$$\int_c^x g(t) dt = 2x^2 - 7x + 3$$

## 第 6 問

(配点 14)

図 6.1 のように、 $x^2$  の係数が  $a$  である二次関数が描く放物線が、 $x = \alpha$ 、 $x = \beta$  において  $x$  軸と交わっているとき、放物線の方程式は  $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$  と表される。図 6.1 は  $a > 0$  の場合であるが、斜線部の面積を  $S$  とおくと、 $\alpha \leq x \leq \beta$  において放物線  $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$  が  $y \leq 0$  を満たすから、 $S$  は次の定積分で表される。

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} -a(x - \alpha)(x - \beta) dx \quad (6.1)$$

図 6.2 は、図 6.1 の放物線を  $x$  軸方向に  $-\alpha$  平行移動したものである。平行移動によって図形の形状や大きさは変化しないから、図 6.2 の斜線部の面積も  $S$  である。

$$S = \int_0^{\beta - \alpha} -ax\{x - (\beta - \alpha)\} dx \quad (6.2)$$

(6.1) と (6.2) を計算すると、 $S = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$  となる。

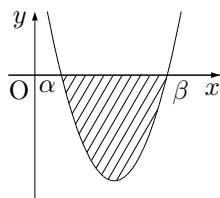


図 6.1:  $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$

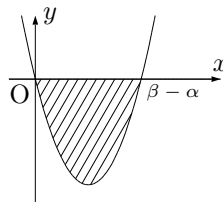


図 6.2:  $y = -ax\{x - (\beta - \alpha)\}$

このように、面積を求める際に積分区間と被積分関数の平行移動を行って計算ができる。これは、面積のみならず、一般の定積分においても同様である。全ての区間で定積分を定義できる関数  $f(x)$  において、次が成り立つ。ただし、 $s$ 、 $t$ 、 $p$  は実数の定数である。

$$\int_s^t f(x) dx = \int_{s+p}^{t+p} f(x - p) dx$$

(1) (6.1) と (6.2) の計算過程を簡潔に述べ、 $S = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$  となることを確かめよ。

(2) 定積分  $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^7(x - \beta)^3 dx$  を求めよ。

(3) すべての実数  $x$  について、 $g(x) = g(x + 1)$  を満たすような関数  $g(x)$  がある。このとき、定積分

$$\int_6^9 g(x) dx$$

を  $I = \int_0^1 g(x) dx$  を用いて表せ。

## 第 7 問

(配点 14)

図 7.1 は、 $a \leq x \leq b$  において  $f(x) \geq 0$  である関数  $f(x)$  について、 $y = f(x)$  のグラフと、 $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x$  軸で囲まれる図形に斜線を塗ったものである。図 7.1 の斜線部の面積を求めるとき、縦の長さが  $f(x)$ 、横の長さが  $dx$  である微小な長方形の面積  $f(x) dx$  の、区間  $a \leq x \leq b$  での総和として、定積分  $\int_a^b f(x) dx$  の値を求めれば良い。

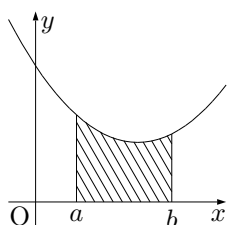


図 7.1: グラフと面積

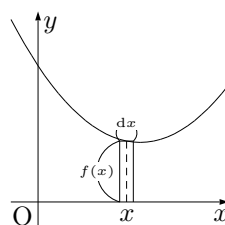


図 7.2: 微小な長方形

この考え方は、立体の体積を求める際も同様である。図 7.1 の斜線部の図形を、 $x$  軸を軸として 1 回転してできる回転体  $V$  の体積を求めるとき、図 7.2 のように縦の長さが  $f(x)$ 、横の長さが  $dx$  である長方形を、 $x$  軸を軸に 1 回転してできる微小な柱体  $U$  の体積を求め、区間  $a \leq x \leq b$  においてその体積の総和を求めれば良い。 $U$  は底面が半径  $f(x)$  の円、高さが  $dx$  の円柱とみることができる。

回転体以外の場合でも、微小な柱体の体積の総和を求めることで、立体の体積を求めることができる。

$xy$  平面上に、点  $P(x, 0)$ 、点  $Q(x, x^3 - x + 1)$  を定め、 $xy$  平面と垂直に、正三角形  $PQR$  を描く。 $x$  が  $0 \leq x \leq 2$  の範囲を動くとき、 $\triangle PQR$  の周および内部が通過する点の集合が構成する立体  $W$  の体積を求めよう。 $W$  の体積は、底面が  $\triangle PQR$ 、高さが  $dx$  である微小な三角柱  $T$  の体積の、区間  $0 \leq x \leq 2$  における総和として求められる。立体  $W$  のようすは図 7.3 の通りである。

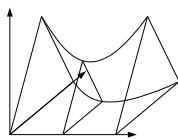


図 7.3:  $\triangle PQR$  の軌跡 (立体  $W$ )

- (1)  $U$  の体積を  $f(x)$ ,  $dx$  を用いて表せ。
- (2)  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x$  軸で囲まれる図形を、 $x$  軸を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。
- (3)  $T$  の体積を  $x$ ,  $dx$  を用いて表せ。
- (4)  $W$  の体積を求めよ。