
確 認 試 験 問 題

積 分 法 の 考 え

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 7 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：不定積分と定積分

1.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が, $f'(x) = -3x^2 + 10x - 8$, $f(2) = -5$ を満たすとき, $f(x)$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_{-4}^5 (x^2 + 2x + 3) dx$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^2 |x^2 - x| dx$ を求めよ。

1.2 解答

(1) $f(x)$ は C を定数として,

$$\int f'(x) dx = \int (-3x^2 + 10x - 8) dx = -x^3 + 5x^2 - 8x + C$$

と表される。また, $f(2) = -5$ を満たすことより

$$f(2) = -4 + C = -5$$

を解いて $C = -1$ を得る。したがって

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x - 1$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-4}^5 (x^2 + 2x + 3) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-4}^5 \\ &= \left(\frac{125}{3} + 25 + 15 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 16 - 12 \right) \\ &= 99 \end{aligned}$$

(3) 被積分関数の絶対値を外すと

$$|x^2 - x| = \begin{cases} -x^2 + x & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ x^2 - x & (x < 0 \text{ または } 1 < x \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^2 - x| dx &= \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

1.3 解説

不定積分・定積分の基本計算です。

- 不定積分は微分の逆演算で、積分定数 C を必ず付ける。
 - 定積分は、原始関数を1つとり、上端の値から下端の値を引く。
- (1) $f(x)$ は $f'(x)$ の不定積分なので $f(x) = \int f'(x) dx$ の形に積分定数 C 付きで表せます。条件 $f(2) = -5$ を代入して C を決めれば $f(x)$ が定まります。
 - (2) 各項を積分して原始関数を作り、上端 5 と下端 -4 を代入して引くだけです。下端が負なので、代入時の符号を落とさないように注意します。
 - (3) 絶対値の中身 $x^2 - x = x(x - 1)$ の符号を調べ、 $0 \leq x \leq 1$ では 0 以下（負または 0）、それ以外では正であることを使って絶対値を外します。積分区間 $0 \leq x \leq 2$ を $0 \leq x \leq 1$ と $1 \leq x \leq 2$ に分け、それぞれで符号に応じた被積分関数にしてから積分します。

1.4 採点

【第1問 14点】

- (1) 4点
- (2) 4点
- (3) 6点
 - 定積分の区間を $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 2$ に分割できたか。

2 第2問：グラフと面積

2.1 問題

座標平面上の曲線および直線に囲まれる図形の面積を考える。以下の問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 次の4つの曲線および直線に囲まれる図形の面積を求めよ。

$$y = x^2 - 3x + 3, \quad y = x - 2, \quad y \text{ 軸}, \quad x = 3$$

- (2) 次の2つの曲線に囲まれる図形の面積を求めよ。

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{11}{2}, \quad y = -2x^2 + 8x - 5$$

2.2 解答

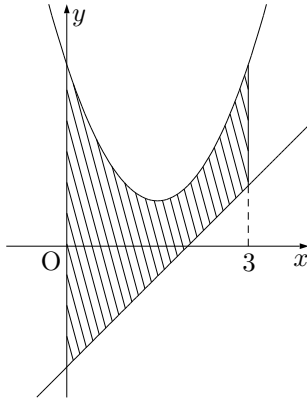


図 2.1: (1)

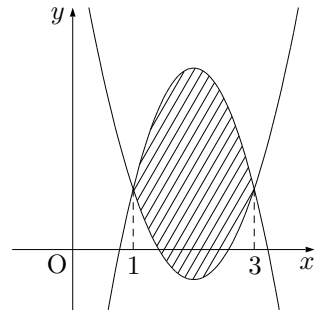


図 2.2: (2)

- (1) $f(x) = x^2 - 3x + 3$, $g(x) = x - 2$ とする。

$$f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

は常に正であるから、 $f(x) > g(x)$ であり、 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフは図 2.1 のように常に $f(x)$ が $g(x)$ より上側にある。求めるのは図 2.1 の斜線部の面積 S で、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^3 (x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_0^3 \\ &= 9 - 18 + 15 \\ &= 6 \end{aligned}$$

である。

$$(2) \quad h(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{11}{2}, \quad i(x) = -2x^2 + 8x - 5 \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} h(x) - i(x) &= \frac{7}{2}x^2 - 14x + \frac{21}{2} \\ &= \frac{7}{2}(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より、 $y = h(x)$ と $y = i(x)$ のグラフは $x = 1$, $x = 3$ で交わる。また、区間 $1 \leq x \leq 3$ で

$$h(x) - i(x) \geq 0$$

すなわち

$$h(x) \geq i(x)$$

であるから、グラフは図 2.2 のようになる。求めるのは図 2.2 の斜線部の面積 T で、

$$\begin{aligned} T &= \int_1^3 \{i(x) - h(x)\} dx \\ &= \int_1^3 -\frac{7}{2}(x-1)(x-3) dx \\ &= \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{6}(3-1)^3 \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

である。

2.3 解説

グラフの位置関係に注意して計算します。どちらがどの区間で上、下にあるのか、共有点はどこで持つか、ということを調べます。

- (1) $f(x) = g(x)$ の解が無いことから、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は共有点を持たないことが分かります。 $f(x)$ の方が次数が大きく最高次の係数が正であることから、 x が大きい区間では $y = f(x)$ が $y = g(x)$ より上にあることがわかるため、 $y = f(x)$ が $y = g(x)$ より常に上にあると予測できます。よって $f(x) - g(x)$ が正であることを解答で示しました。

(2) $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ を使えます。

2.4 採点

【第2問 14点】

(1) 7点

(2) 7点

(1)(2) グラフの上下関係や交点についての情報が求められたか。定積分を計算できたか。

3 第3問：グラフの接線と面積

3.1 問題

座標平面上に、放物線

$$C: y = x^2 + 2x - 1$$

と、 C 上の点 $P(-3, 2)$ における接線 D を定める。 t を $t \neq -3$ を満たす実数とし、 C 、 D および直線 $x = t$ で囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく。

以下の問いに答えよ。必要であれば、不定積分に関する次の式を用いてもよい。ただし、 n を自然数、 a を 0 でない実数、 b を実数とする。

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax + b)^{n+1} + K \quad (K \text{ は積分定数})$$

- (1) $t < -3$ と $t > -3$ のそれぞれの場合について、 $S(t)$ を t で表せ。
- (2) $S(t) = 2$ となる t の値を求めよ。
- (3) $t > -3$ とし、 C と直線 $x = t$ の交点を Q とする。線分 PQ と C が囲む図形の面積を $U(t)$ とおくと、 $\frac{U(t)}{S(t)}$ の値は t によらず一定になることを示し、その値を求めよ。

3.2 解答

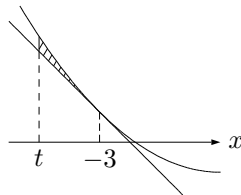


図 3.1: $t < -3$ のとき

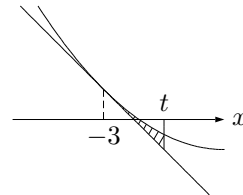


図 3.2: $t > -3$ のとき

- (1) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ 、 D の方程式を $y = g(x)$ とおくと、 $g(x)$ は 1 次式で、 C と D が x 座標が -3 の点で接するから、 $f(x) - g(x)$ は x^2 の係数が 1 で、 $(x + 3)^2$ を因数にもつ。ゆえに

$$f(x) - g(x) = (x + 3)^2$$

となる。

- (i) $t < -3$ のとき、図 3.1 の斜線部の面積 $S(t)$ は次の通り。

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{-3} \{f(x) - g(x)\} dx = \int_t^{-3} (x + 3)^2 dx = \left[\frac{1}{3} (x + 3)^3 \right]_t^{-3} \\ &= -\frac{1}{3} (t + 3)^3 \end{aligned}$$

- (ii) $-3 < t$ のとき、図 3.2 の斜線部の面積 $S(t)$ は次の通り。

$$S(t) = \int_{-3}^t \{f(x) - g(x)\} dx = \int_{-3}^t (x + 3)^2 dx = \left[\frac{1}{3} (x + 3)^3 \right]_{-3}^t$$

$$= \frac{1}{3}(t+3)^3$$

(i), (ii) より, $S(t)$ は次のように表される。

$$S(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(t+3)^3 & (t < -3 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{3}(t+3)^3 & (-3 < t \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) (i) $t < -3$ のとき, $S(t) = 2$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} S(t) = 2 &\iff -\frac{1}{3}(t+3)^3 = 2 \\ &\iff t = -3 - \sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

得られた t の値は $t < -3$ を満たす。

(ii) $t > -3$ のとき, $S(t) = 2$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} S(t) = 2 &\iff \frac{1}{3}(t+3)^3 = 2 \\ &\iff t = -3 + \sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

得られた t の値は $-3 < t$ を満たす。

ゆえに, 求めるべき t の値は

$$t = -3 \pm \sqrt[3]{6}$$

である。

(3) 図 3.3 のようになる。

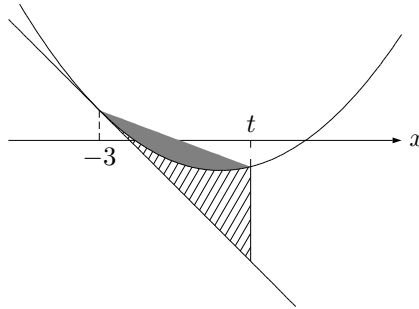


図 3.3

直線 PQ の方程式を $y = h(x)$ とおく。 $f(x)$ は最高次の係数が 1 の 2 次関数, $h(x)$ は 1 次関数であり, これらが $x = -3, t$ において交わっているから,

$$f(x) - h(x) = (x+3)(x-t)$$

である。また, $-3 < x < t$ において直線 PQ の方が C より上側にある。よって, 塗りつぶし部分の面積 $U(t)$ は

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_{-3}^t \{h(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{-3}^t -(x+3)(x-t) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}(t+3)^3$$

である。ゆえに、 $t > -3$ において、

$$\frac{U(t)}{S(t)} = \frac{\frac{1}{6}(t+3)^3}{\frac{1}{3}(t+3)^3} = \frac{1}{2}$$

となり、 t によらない一定の値をとる。

3.3 解説

放物線とその接線が囲む面積の問題です。ここでの鍵は、接線の方程式を実際に求めなくても面積が計算できるという点です。放物線 $y = f(x)$ (最高次の係数 1) と接線 $y = g(x)$ が $x = -3$ で接するなら、 $f(x) - g(x)$ は最高次の係数が 1 で $(x+3)^2$ を因数にもつので、 $f(x) - g(x) = (x+3)^2$ と分かります。積分の公式

$$\int (x+a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C$$

も使うと計算が簡潔になります。

- (1) 面積は（上の関数）－（下の関数）の積分です。 $f(x) - g(x) = (x+3)^2$ を積分するだけですが、 t が -3 より左か右かで積分区間の向き（ t から -3 か、 -3 から t か）が変わるので、 $t < -3$ と $t > -3$ の 2 通りに分けます。面積は正の量なので、符号がそろえるように注意して $S(t) = \pm \frac{1}{3}(t+3)^3$ の形にまとめます。
- (2) (1) で求めた各場合の $S(t)$ に対して $S(t) = 2$ を解きます。 $(t+3)^3$ が定数になるので t は 3 乗根を用いて表され、得られた t がそれぞれの場合の範囲（ $t < -3$ または $t > -3$ ）を満たすかを確認します。
- (3) 弦 PQ と放物線が囲む面積 $U(t)$ は、 $f(x) - h(x) = (x+3)(x-t)$ (h は直線 PQ) から、いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式で $\frac{1}{6}(t+3)^3$ と求まります。一方 $S(t) = \frac{1}{3}(t+3)^3$ なので、比 $\frac{U(t)}{S(t)} = \frac{1}{2}$ となり t によりません。放物線と直線・接線が囲む面積の間に成り立つ、 $\frac{1}{6}$ と $\frac{1}{3}$ の関係が背景にあります。

3.4 採点

【第3問 16点】

(1) 6点

- 面積を求める際の定積分が書けたか。
- 2つの場合についてそれぞれ計算できたか。

(2) 4点

- 2つの場合の方程式を解けたか。
- それぞれの場合について求めた答えが範囲に含まれるか確認したか。

(3) 6点

4 第4問：面積の分割

4.1 問題

a, b を $a > b$ を満たす定数とし、座標平面上に、放物線 $C: y = -x^2 + 3x$ を定める。 C と x 軸が囲む図形の面積が、2 直線 $y = ax, y = bx$ によって3等分されるとき、 a, b の値を求めよ。

4.2 解答

直線 $y = ax$ を A 、直線 $y = bx$ を B とおく。 A と C の交点の x 座標は $x = 0, x = 3 - a$ 、 B と C の交点の x 座標は $x = 0, x = 3 - b$ であり、グラフは図 4.1 のようになる。

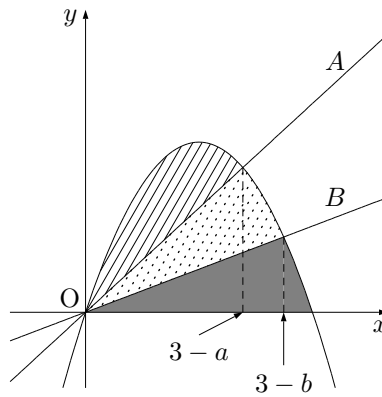


図 4.1: 直線 A, B と曲線 C

図 4.1 の斜線部の面積を S_1 、打点部の面積を S_2 、黒塗部の面積を S_3 、 C と x 軸が囲む図形の面積を S とおくと、

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S \quad (4.1)$$

が成り立てばよい。 $S_1 + S_2 + S_3 = S$ に注意すると、

$$\begin{aligned} (4.1) \quad &\Longleftrightarrow S_1 = \frac{1}{3}S \quad \text{かつ} \quad S_2 = \frac{1}{3}S \\ &\Longleftrightarrow S_1 = \frac{1}{3}S \quad \text{かつ} \quad S_1 + S_2 = \frac{2}{3}S \end{aligned} \quad (4.2)$$

である。ところで、図 4.1 より、(4.2)の面積を求めると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{3-a} (-x^2 + 3x - ax) dx = \int_0^{3-a} -x\{x - (3-a)\} dx = \frac{1}{6}(3-a)^3 \\ S_1 + S_2 &= \int_0^{3-b} (-x^2 + 3x - bx) dx = \int_0^{3-b} -x\{x - (3-b)\} dx = \frac{1}{6}(3-b)^3 \\ S &= \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} (4.2) \quad &\Longleftrightarrow \frac{1}{6}(3-a)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{6}(3-b)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} \\ &\Longleftrightarrow a = 3 - \sqrt[3]{9} \quad \text{かつ} \quad b = 3 - \sqrt[3]{18} \end{aligned}$$

となる。 $\sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{18} < \sqrt[3]{27} = 3$ より $0 < 3 - \sqrt[3]{18} < 3 - \sqrt[3]{9} < 3$ であるから、これらは前提条件 $0 < b < a < 3$ (したがって $a > b$) をみたす。ゆえに、求める値は

$$a = 3 - \sqrt[3]{9}, \quad b = 3 - \sqrt[3]{18}$$

である。

4.3 解説

放物線と x 軸が囲む面積を、2 直線で 3 等分する問題です。放物線 $y = -x^2 + 3x$ と直線 $y = ax$ が囲む面積は、交点の x 座標が 0 と $3 - a$ であることから、 $\frac{1}{6}$ 公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} -(x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

を使って $\frac{1}{6}(3 - a)^3$ と一気に求められます。これを活用できるかがポイントです。

3 等分の条件は、斜線部・打点部・黒塗部の面積を S_1, S_2, S_3 として $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S$ (S は放物線と x 軸が囲む全体の面積) です。ここで S_1, S_2, S_3 を個別に求めて 3 つの等式を立てるより、

$$S_1 = \frac{1}{3}S \quad \text{かつ} \quad S_1 + S_2 = \frac{2}{3}S$$

と累積した面積で条件を書くほうが計算が軽くなります。 S_1 は直線 $y = ax$ と放物線が囲む面積、 $S_1 + S_2$ は直線 $y = bx$ と放物線が囲む面積として、どちらも $\frac{1}{6}$ 公式で $\frac{1}{6}(3 - a)^3, \frac{1}{6}(3 - b)^3$ と表せます。あとは $S = \frac{9}{2}$ と合わせて、 a, b についての方程式を解けば求まります。計算が煩雑になりそうなときほど、このように計算量の少ない立式を選ぶことが大切です。

4.4 採点

【第4問 14点】

- 交点を求められたか。
- 図形を描くかまたは文章で位置関係を説明できたか。
- 同値関係で考えるべき式を導けたか。
- 定積分で面積を表せたか。

5 第5問：定積分を含む方程式

5.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \int_0^2 (t-x)f(t) dt + 3$$

- (2) 次の等式を満たす関数 $g(x)$ および定数 c の値を求めよ。

$$\int_c^x g(t) dt = 2x^2 - 7x + 3$$

5.2 解答

- (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^2 (t-x)f(t) dt + 3 \\ &= -x \int_0^2 f(t) dt + \int_0^2 tf(t) dt + 3 \end{aligned}$$

において,

$$\begin{cases} a = \int_0^2 f(t) dt \\ b = \int_0^2 tf(t) dt \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\quad (5.2)$$

とおくと, $f(x)$ は

$$f(x) = -ax + b + 3 \quad (5.3)$$

と表される。したがって, (5.1), (5.2)は

$$\begin{aligned} (5.1) \quad &\Longleftrightarrow a = \int_0^2 (-at + b + 3) dt \\ &\Longleftrightarrow a = \left[-\frac{a}{2}t^2 + (b+3)t \right]_0^2 \\ &\Longleftrightarrow 3a - 2b = 6 \\ (5.2) \quad &\Longleftrightarrow b = \int_0^2 \{-at^2 + (b+3)t\} dt \\ &\Longleftrightarrow b = \left[-\frac{a}{3}t^3 + \frac{b+3}{2}t^2 \right]_0^2 \\ &\Longleftrightarrow 8a - 3b = 18 \end{aligned}$$

と表され, この2式を連立した

$$\begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ 8a - 3b = 18 \end{cases}$$

を解いて $a = \frac{18}{7}$, $b = \frac{6}{7}$ を得る。(5.3)より, 求めるべき関数 $f(x)$ は

$$f(x) = -\frac{18}{7}x + \frac{27}{7}$$

である。

(2) 与式

$$\int_c^x g(t) dt = 2x^2 - 7x + 3 \quad (5.4)$$

の両辺を x について微分すると,

$$g(x) = 4x - 7$$

となる。これが求めるべき $g(x)$ である。また, (5.4)において $x = c$ とすると,

$$\begin{aligned} \int_c^c g(t) dt &= 2c^2 - 7c + 3 \\ \iff 0 &= 2c^2 - 7c + 3 \\ \iff (2c - 1)(c - 3) &= 0 \\ \iff c = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad c &= 3 \end{aligned}$$

である。さらに, c がこの値をとるときに等式が成り立つかを確認する。 $c = \frac{1}{2}$ のとき, 等式の左辺を計算すると,

$$\int_{\frac{1}{2}}^x g(t) dt = \left[2t^2 - 7t \right]_{\frac{1}{2}}^x = 2x^2 - 7x + 3$$

であり, 右辺と一致する。また, $c = 3$ のとき, 等式の左辺を計算すると,

$$\int_3^x g(t) dt = \left[2t^2 - 7t \right]_3^x = 2x^2 - 7x + 3$$

であり, 右辺と一致する。したがって, c の値は $c = \frac{1}{2}, 3$ である。

5.3 解説

定積分を含む方程式から関数を決定する問題です。積分区間によって扱い方が2通りに分かります。

- 積分区間が定数 ($\int_0^2 \dots dt$ など) のとき, その定積分は定数なので, 文字でにおいて処理する。
 - 積分の上端に変数 x があるとき, 両辺を x で微分する ($\int_c^x g(t) dt$ を x で微分すると $g(x)$ になる)。
- (1) $\int_0^2 \dots dt$ は定数です。被積分関数を $(t-x)f(t) = tf(t) - xf(t)$ と分け, $a = \int_0^2 f(t) dt$, $b = \int_0^2 tf(t) dt$ とおくと, $f(x) = -ax + b + 3$ という1次式で表せます。この形を a, b の定義式に戻して代入すると, a, b についての連立方程式が得られ, これを解けば $f(x)$ が定まります。定数とおいた量が自分自身と整合するように決める, という考え方が要点です。
- (2) 積分の上端に x があるので, 両辺を x について微分すると $g(x) = 4x - 7$ がすぐに求まります。定数 c は, 与式で $x = c$ とすると左辺の積分が0になることから, $0 = 2c^2 - 7c + 3$ を解いて求めます。得られた c の値が実際に等式を成り立たせるかを検算しておくとう確実です。

5.4 採点

【第5問 14点】

(1) 7点

- 定積分を積分変数を含む部分とそうでない部分に分けて整理することができたか。
- 定積分を定数と置いて、それぞれ計算できたか。

(2) 7点

- $g(x)$ を求められたか。
- c の値を求められたか。

6 第6問：平行移動と定積分

6.1 問題

図 6.1 のように、 x^2 の係数が a である二次関数が描く放物線が、 $x = \alpha$ 、 $x = \beta$ において x 軸と交わっているとき、放物線の方程式は $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と表される。図 6.1 は $a > 0$ の場合であるが、斜線部の面積を S とおくと、 $\alpha \leq x \leq \beta$ において放物線 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ が $y \leq 0$ を満たすから、 S は次の定積分で表される。

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} -a(x - \alpha)(x - \beta) dx \quad (6.1)$$

図 6.2 は、図 6.1 の放物線を x 軸方向に $-\alpha$ 平行移動したものである。平行移動によって図形の形状や大きさは変化しないから、図 6.2 の斜線部の面積も S である。

$$S = \int_0^{\beta - \alpha} -ax\{x - (\beta - \alpha)\} dx \quad (6.2)$$

(6.1) と (6.2) を計算すると、 $S = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$ となる。

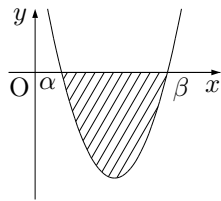


図 6.1: $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$

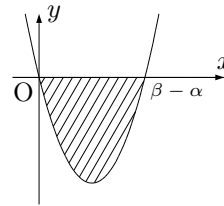


図 6.2: $y = -ax\{x - (\beta - \alpha)\}$

このように、面積を求める際に積分区間と被積分関数の平行移動を行って計算ができる。これは、面積のみならず、一般の定積分においても同様である。全ての区間で定積分を定義できる関数 $f(x)$ において、次が成り立つ。ただし、 s 、 t 、 p は実数の定数である。

$$\int_s^t f(x) dx = \int_{s+p}^{t+p} f(x - p) dx$$

- (1) (6.1) と (6.2) の計算過程を簡潔に述べ、 $S = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$ となることを確かめよ。
- (2) 定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^7(x - \beta)^3 dx$ を求めよ。
- (3) すべての実数 x について、 $g(x) = g(x + 1)$ を満たすような関数 $g(x)$ がある。このとき、定積分

$$\int_6^9 g(x) dx$$

を $I = \int_0^1 g(x) dx$ を用いて表せ。

6.2 解答

(1) (6.1)の計算過程は次の通り。

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} -a(x - \alpha)(x - \beta) \, dx \\
 &= a \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 + (\alpha + \beta)x - \alpha\beta\} \, dx \\
 &= a \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{\alpha + \beta}{2}x^2 - \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= a \left\{ -\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{\alpha + \beta}{2}(\beta^2 - \alpha^2) - \alpha\beta(\beta - \alpha) \right\} \\
 &= \frac{a}{6}(\beta^3 - 3\beta^2\alpha + 3\beta\alpha^2 - \alpha^3) \\
 &= \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3
 \end{aligned}$$

(6.2)の計算過程は次の通り。

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\beta - \alpha} -ax\{x - (\beta - \alpha)\} \, dx \\
 &= a \int_0^{\beta - \alpha} \{-x^2 + (\beta - \alpha)x\} \, dx \\
 &= a \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{\beta - \alpha}{2}x^2 \right]_0^{\beta - \alpha} \\
 &= a \left\{ -\frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \right\} \\
 &= \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \int_0^{\beta - \alpha} x^7\{x - (\beta - \alpha)\}^3 \, dx \\
 &= \int_0^{\beta - \alpha} \{x^{10} - 3(\beta - \alpha)x^9 + 3(\beta - \alpha)^2x^8 - (\beta - \alpha)^3x^7\} \, dx \\
 &= \left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{3x^{10}}{10}(\beta - \alpha) + \frac{x^9}{3}(\beta - \alpha)^2 - \frac{x^8}{8}(\beta - \alpha)^3 \right]_0^{\beta - \alpha} \\
 &= \left(\frac{1}{11} - \frac{3}{10} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) (\beta - \alpha)^{11} \\
 &= -\frac{1}{1320}(\beta - \alpha)^{11}
 \end{aligned}$$

(3) $g(x)$ は周期 1 をもつ関数であり,

$$\cdots = g(x + 8) = g(x + 7) = g(x + 6) = \cdots = g(x + 1) = g(x) = \cdots$$

であることに注意する。

$$\begin{aligned}
 \int_6^9 g(x) \, dx &= \int_6^7 g(x) \, dx + \int_7^8 g(x) \, dx + \int_8^9 g(x) \, dx \\
 &= \int_0^1 g(x + 6) \, dx + \int_0^1 g(x + 7) \, dx + \int_0^1 g(x + 8) \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 g(x) \, dx + \int_0^1 g(x) \, dx + \int_0^1 g(x) \, dx \\
&= I + I + I \\
&= 3I
\end{aligned}$$

6.3 解説

積分区間と被積分関数をそろえて平行移動する，という考え方を扱う問題です。関数 $f(x)$ について

$$\int_s^t f(x) \, dx = \int_{s+p}^{t+p} f(x-p) \, dx$$

が成り立ち，積分区間の端が 0 になるように平行移動すると計算が軽くなることが多いです。

- (1) 被積分関数を展開し，各項を積分して区間の両端を代入するだけです。(6.1) は区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ のまま，(6.2) は $0 \leq x \leq \beta - \alpha$ に平行移動した形で計算しますが，どちらも同じ値 $\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$ になります。平行移動しておくで下端の代入が 0 になり，計算量がはっきり減ることを実感できます。
- (2) x 軸方向に $-\alpha$ 平行移動して区間を $0 \leq x \leq \beta - \alpha$ にそろえるのがポイントです。 $(x - \alpha)^7$ が x^7 に， $(x - \beta)^3$ が $\{x - (\beta - \alpha)\}^3$ に変わり，展開して項ごとに積分できます。指数が大きいので，係数の分数計算を通分して丁寧に進めましょう。
- (3) $g(x) = g(x+1)$ は， g が周期 1 をもつことを表しています。区間 $6 \leq x \leq 9$ を長さ 1 の 3 つの区間に分け，それぞれを平行移動して区間 $0 \leq x \leq 1$ にそろえると，周期性から中身がすべて $g(x)$ に一致し， I が 3 つ分で $3I$ になります。

6.4 採点

【第 6 問 14 点】

- (1) 4 点
- (2) 5 点
- (3) 5 点

7 第7問：立体の体積

7.1 問題

図 7.1 は、 $a \leq x \leq b$ において $f(x) \geq 0$ である関数 $f(x)$ について、 $y = f(x)$ のグラフと、 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, x 軸で囲まれる図形に斜線を塗ったものである。図 7.1 の斜線部の面積を求めるとき、縦の長さが $f(x)$, 横の長さが dx である微小な長方形の面積 $f(x) dx$ の、区間 $a \leq x \leq b$ での総和として、定積分 $\int_a^b f(x) dx$ の値を求めれば良い。

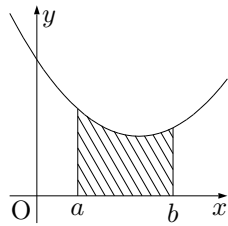


図 7.1: グラフと面積

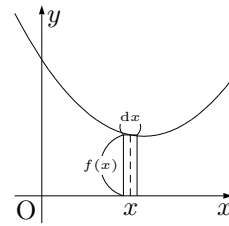
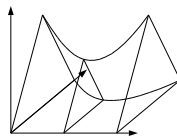


図 7.2: 微小な長方形

この考え方は、立体の体積を求める際も同様である。図 7.1 の斜線部の図形を、 x 軸を軸として 1 回転してできる回転体 V の体積を求めるとき、図 7.2 のように縦の長さが $f(x)$, 横の長さが dx である長方形を、 x 軸を軸に 1 回転してできる微小な柱体 U の体積を求め、区間 $a \leq x \leq b$ においてその体積の総和を求めれば良い。 U は底面が半径 $f(x)$ の円、高さが dx の円柱とみることができる。

回転体以外の場合でも、微小な柱体の体積の総和を求めることで、立体の体積を求めることができる。

xy 平面上に、点 $P(x, 0)$, 点 $Q(x, x^3 - x + 1)$ を定め、 xy 平面と垂直に、正三角形 PQR を描く。 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を動くとき、 $\triangle PQR$ の周および内部が通過する点の集合が構成する立体 W の体積を求めよう。 W の体積は、底面が $\triangle PQR$, 高さが dx である微小な三角柱 T の体積の、区間 $0 \leq x \leq 2$ における総和として求められる。立体 W のようすは図 7.3 の通りである。

図 7.3: $\triangle PQR$ の軌跡 (立体 W)

- (1) U の体積を $f(x)$, dx を用いて表せ。
- (2) $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, x 軸で囲まれる図形を、 x 軸を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。
- (3) T の体積を x , dx を用いて表せ。
- (4) W の体積を求めよ。

7.2 解答

- (1)
- U
- は底面積
- $\pi \cdot \{f(x)\}^2$
- 、高さ
- dx
- の円柱だから、その体積
- $|U|$
- は

$$|U| = \pi \{f(x)\}^2 dx$$

である。

- (2)
- V
- の体積
- $|V|$
- は、
- $|U|$
- の区間
- $a \leq x \leq b$
- における定積分

$$|V| = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx$$

である。この式において $f(x) = x^2 + 1$ 、区間を $1 \leq x \leq 2$ とすれば本題の体積となり、

$$\begin{aligned} |V| &= \pi \int_1^2 (x^2 + 1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_1^2 \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{178}{15} \pi \end{aligned}$$

である。

- (3)
- $\triangle PQR$
- の1辺の長さは
- $x^3 - x + 1$
- であるから、その面積は

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \cdot (x^3 - x + 1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (x^3 - x + 1)^2$$

である。よって T の体積 $|T|$ は

$$\begin{aligned} |T| &= \triangle PQR dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (x^3 - x + 1)^2 dx \end{aligned}$$

である。

- (4) (3) より
- W
- の体積
- $|W|$
- は

$$\begin{aligned} |W| &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 (x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{128}{7} - \frac{64}{5} + 8 + \frac{8}{3} - 4 + 2 \right) \\ &= \frac{743}{210} \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

7.3 解説

立体の体積を、微小な柱体の体積の総和（定積分）として求める考え方の問題です。断面の面積を $S(x)$ とすると、厚み dx の柱体の体積は $S(x)dx$ で、これを区間で積分すれば立体の体積になります。断面積を x の式で正しく表せるかが要点です。

- (1) U は底面が半径 $f(x)$ の円、高さが dx の円柱です。底面積は $\pi\{f(x)\}^2$ なので、体積はそれに高さを掛けた $\pi\{f(x)\}^2 dx$ です。
- (2) (1) の柱体の体積を区間で積分すると、回転体の体積は $\int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx$ で求まります。ここでは $f(x) = x^2 + 1$ 、区間を $1 \leq x \leq 2$ とし、被積分関数 $(x^2 + 1)^2$ を展開してから積分します。 π を最後までくくり出しておくとお通しがよいです。
- (3) 断面の $\triangle PQR$ は1辺の長さが $PQ = x^3 - x + 1$ の正三角形です。1辺 a の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ なので、断面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}(x^3 - x + 1)^2$ となります。 T の体積はこれに厚み dx を掛けたものです。区間 $0 \leq x \leq 2$ では $x^3 - x + 1 > 0$ なので、長さとして扱ってよいことも確認しておきましょう。
- (4) (3) の T の体積を区間 $0 \leq x \leq 2$ で積分します。 $(x^3 - x + 1)^2$ を展開して項ごとに積分するだけですが、6次までの多項式になるので、展開と各項の積分の係数計算を慎重に行いましょう。 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ は定数なので積分の外に出しておきます。

7.4 採点

【第7問 14点】

- (1) 2点
- (2) 5点
- (3) 2点
- (4) 5点