

確 認 試 験 問 題

微 分 法 の 考 え

(配点 100 点)

(日付) 年 月 日

(開始)

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 ~ (90 分) ~

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 (終了)

注 意 事 項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 7 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 6 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 6 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 12)

a, b を実数の定数とし, 2 つの関数

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

$$g(x) = x^2 + ax + b$$

を定義する。

- (1) x が 2 から 3 まで変化するとき, $f(x)$ の平均変化率を求めよ。
- (2) $f(x)$ の $x = 4$ における微分係数 $f'(4)$ を求めよ。
- (3) $f'(3) = g'(3)$ と $f(3) = g(3)$ がともに成り立つとき, a, b の値を求めよ。

第 2 問

(配点 18)

座標平面上にグラフを描く。以下の問いに答えよ。

(1) 3 次関数

$$f(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

の増減表を作り、極値を求め、曲線 $y = f(x)$ のグラフを描け。また、 $f(x)$ の区間 $-5 \leq x < 2$ における最大値と最小値を求めよ。

(2) 4 次関数

$$g(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x + 1$$

の増減表を作り、極値を求め、曲線 $y = g(x)$ のグラフを描け。

第 3 問

(配点 14)

半径 1 の球に内接する円柱 C を考える。

- (1) C の体積を, C の高さを x とおいて x の式で表せ。
- (2) C の体積の最大値を求めよ。

第 4 問

(配点 23)

座標平面上に、2 つの曲線 P , Q と 1 つの直線 R を次のように定める。

$$P: y = x^2 + 2x + 1$$

$$Q: y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$

$$R: y = -x + 1$$

また、 a , b , c , d を実数とする。

- (1) 曲線 P の点 $(a, a^2 + 2a + 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 P に、直線 R 上の点 $(b, -b + 1)$ から引ける接線の本数を求めよ。
- (3) 曲線 Q の点 $(c, c^3 + 2c^2 - 4c + 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (4) $d \geq 0$ とする。曲線 Q に、直線 R 上の点 $(d, -d + 1)$ から引ける接線の本数を求めよ。

第 5 問

(配点 19)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) a を実数の定数とする。 x についての方程式

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = a$$

の相異なる実数解の個数を求めよ。

- (2) $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x について、不等式

$$x^3 - x^2 \geq k \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} \right)$$

が成り立つような実数 k の条件を求めよ。ただし、 $k \geq 0$ とする。

第 6 問

(配点 14)

$a, b, k, l, \alpha, \beta$ を実数とし、関数 $f(x), g(x)$ を考える。極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

は、 x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき、 $f(x)$ が限りなく α に近づくことを表し、 $f(x)$ は α に収束するという。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とすると、次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k\alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

分子を有理化することで、分母を 0 以外の値に収束させることができる場合がある。例えば、極限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ を考える。 $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ の分子と分母は $x \rightarrow 2$ において 0 に収束するが、分子と分母に $\sqrt{x} + \sqrt{2}$ をかけることによって、分母を 0 でない値に収束させることができる。次の式でその過程を示した。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

この方法は $\sqrt{x}$ を x について微分するときに有効である。

これ以外にも、 $a \pm b = \frac{a^2 - b^2}{a \mp b}$ (複号同順) を用いることで、極限の計算を行える場合がある。例えば、関数 $\sin x$ を x について微分するとき、三角関数の加法定理に加えて、 $\cos h \neq -1$ を満たす実数 h において

$$1 - \cos h = \frac{1 - \cos^2 h}{1 + \cos h}$$

であること、および $\sin^2 h + \cos^2 h = 1$ を用いることで、極限の計算ができる。

- (1) 次のように $P(x), Q(x)$ を定義する。

$$P(x) = kf(x) + lg(x), \quad Q(x) = f(x)g(x)$$

導関数の定義を用いて $P(x)$ と $Q(x)$ をそれぞれ x について微分し、次の等式を示せ。

$$P'(x) = kf'(x) + lg'(x), \quad Q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- (2) 関数 $\sqrt{x}$ ($x > 0$) を、 x について、定義に従って微分し、その過程と結論を述べよ。
- (3) 関数 $\sin x$ を、 x について、定義に従って微分し、その過程と結論を述べよ。必要ならば、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ を用いてもよい。