
確 認 試 験 問 題

微 分 法 の 考 え

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：平均変化率と微分係数

1.1 問題

a, b を実数の定数とし、2つの関数

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

$$g(x) = x^2 + ax + b$$

を定義する。

- (1) x が 2 から 3 まで変化するときの、 $f(x)$ の平均変化率を求めよ。
- (2) $f(x)$ の $x = 4$ における微分係数 $f'(4)$ を求めよ。
- (3) $f'(3) = g'(3)$ と $f(3) = g(3)$ がともに成り立つとき、 a, b の値を求めよ。

1.2 解答

- (1) 求めるべき値は

$$\begin{aligned}\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} &= \frac{10 - 1}{1} \\ &= 9\end{aligned}$$

である。

- (2) まず $f'(x)$ を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

これに $x = 4$ を代入し、

$$\begin{aligned}f'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 \\ &= 32\end{aligned}$$

となる。

- (3) (2) で求めた $f'(x)$ と、

$$g'(x) = 2x + a$$

にそれぞれ $x = 3$ を代入し、

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 = 15$$

$$g'(3) = 2 \cdot 3 + a = a + 6$$

となる。また、

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 1 = 10$$

$$g(3) = 3^2 + 3a + b = 3a + b + 9$$

である。よって

$$\begin{cases} f'(3) = g'(3) \\ f(3) = g(3) \end{cases} \iff \begin{cases} 15 = a + 6 \\ 10 = 3a + b + 9 \end{cases}$$

であり、これを解いて

$$a = 9, \quad b = -26$$

を得る。

1.3 解説

平均変化率・微分係数・導関数の定義を確認する問題です。

- x が a から b まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ である。
 - $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は、平均変化率の $b \rightarrow a$ の極限であり、導関数 $f'(x)$ に $x = a$ を代入した値に等しい。
- (1) 平均変化率の定義に当てはめ、 $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$ を計算するだけです。定義式を正確に覚えているかが問われています。
- (2) 導関数 $f'(x) = 3x^2 - 4x$ を求めてから $x = 4$ を代入します。極限の定義 $f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ から直接求めることもできますが、導関数を経由するほうが手早いのです。
- (3) $f'(x)$ と $g'(x) = 2x + a$ に $x = 3$ を代入し、さらに $f(3)$, $g(3)$ を計算します。 $f'(3) = g'(3)$ と $f(3) = g(3)$ の2式を連立して a , b を求めます。この2条件は、2曲線が $x = 3$ で接する（同じ点を共有し、かつ傾きも一致する）状況を表しています。

1.4 採点

【第1問 12点】

- (1) 4点
(2) 4点
(3) 4点

2 第2問：関数のグラフと最大・最小

2.1 問題

座標平面上にグラフを描く。以下の問いに答えよ。

(1) 3次関数

$$f(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

の増減表を作り、極値を求め、曲線 $y = f(x)$ のグラフを描け。また、 $f(x)$ の区間 $-5 \leq x < 2$ における最大値と最小値を求めよ。

(2) 4次関数

$$g(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x + 1$$

の増減表を作り、極値を求め、曲線 $y = g(x)$ のグラフを描け。

2.2 解答

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求める。

$$f'(x) = -3x^2 - 8x + 3 = -(3x - 1)(x + 3)$$

増減表は次のようになる。

x		-3		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$\frac{68}{27}$	$\searrow$

従って、 $x = -3$ で極小値 -16 を、 $x = \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{68}{27}$ をとる。 $y = f(x)$ のグラフは図 2.1 に表される。

また、区間 $-5 \leq x < 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値は、図 2.2 の実線部分における y 座標の最大と最小を考えればよく、 $x = -5$ のとき最大値 12 を、 $x = -3$ のとき最小値 -16 をとる。

(2) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求める。

$$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 4x + 6 = 2(2x - 3)(x + 1)(x - 1)$$

増減表は次のようになる。

x		-1		1		$\frac{3}{2}$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{61}{16}$	$\nearrow$

従って、 $x = -1$ で極小値 -4 を、 $x = 1$ で極大値 4 を、 $x = \frac{3}{2}$ で極小値 $\frac{61}{16}$ をとる。 $y = g(x)$

のグラフは図 2.3 に表される。

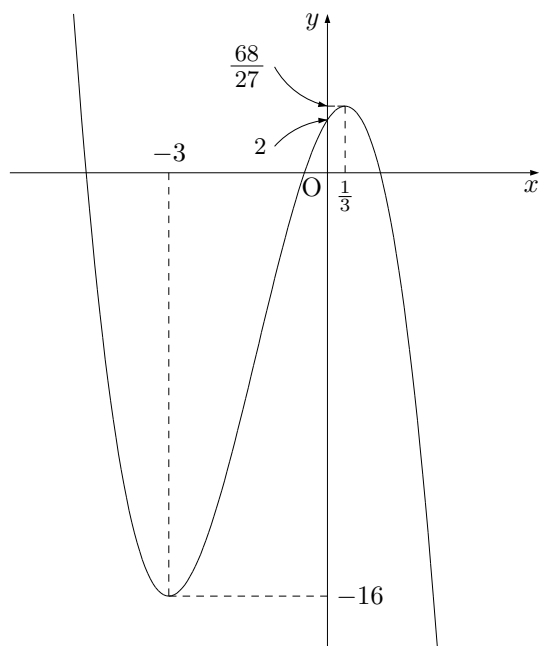


図 2.1: $y = f(x)$ のグラフ

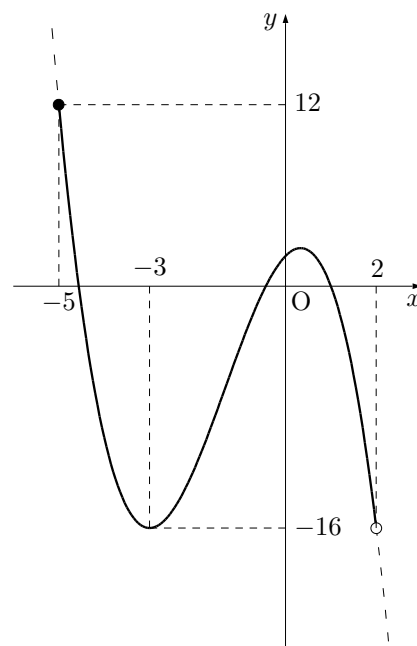


図 2.2: $y = f(x)$ の $-5 \leq x < 2$ の部分

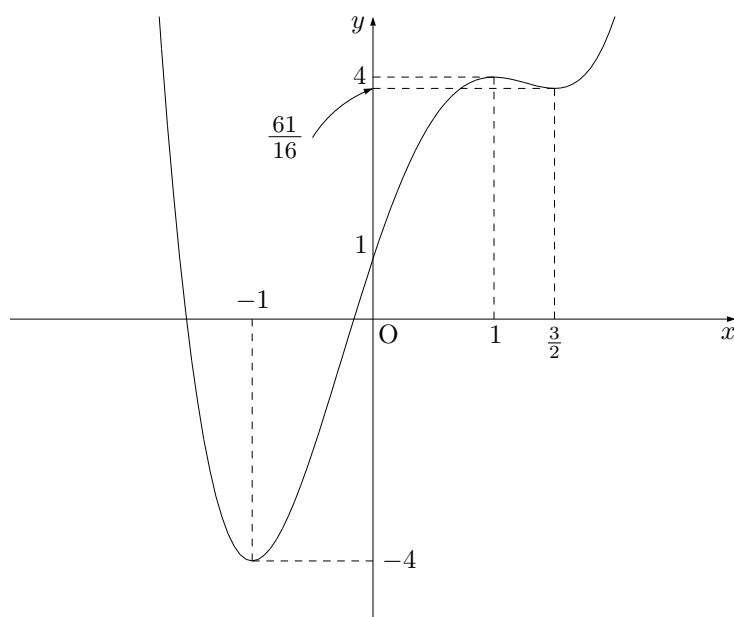


図 2.3: $y = g(x)$ のグラフ

2.3 解説

導関数が正であるとき関数は増加し、導関数が負であるとき関数は減少することを理解していれば解けます。

4 次関数の導関数は 3 次関数なので、極値が 3 つ得られることがあります。定義域が実数全体の多

項式関数では、関数が増加から減少に転じるときの値が極大値、減少から増加に転じるときの値が極小値になることを覚えておきましょう。

小問 (1) 後半の区間 $-5 \leq x < 2$ における最大・最小は、端点が定義域に含まれるかどうか注意到意して考えます。右端 $x = 2$ は含まれない ($x < 2$) ため、 x が 2 に近づくと $f(x)$ は -16 に近づきますが、 $f(2) = -16$ という値そのものとはなりません。一方、 $x = -3$ は区間に含まれており、ここで $f(x)$ は極小値 -16 を実際にとるので、最小値は -16 です。また左端 $x = -5$ では $f(-5) = 12$ となり、これが区間内で最も大きい値なので最大値は 12 です。このように、開いている端点で近づく値と、実際にとる値とを区別することが大切です。

2.4 採点

【第2問 18点】

(1) 9点

- 次の4つのうち、正しく解答できた個数に応じて得点。1つで2点、2つで4点、3つで6点、4つで9点。
 - － 増減表（極値以外）
 - － 極大値と極小値
 - － グラフ
 - － 最大値と最小値
- 極値、最大値、最小値を与える x の値は言及が無くともよい。

(2) 9点

- 次の3つのうち、正しく解答できた個数に応じて得点。1つで2点、2つで4点、3つで6点、4つで9点。
 - － 導関数
 - － 増減表（極値以外）
 - － 極大値と極小値
 - － グラフ
- 極値を与える x の値は言及が無くともよい。

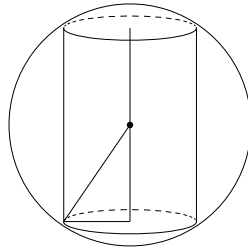
3 第3問：円柱の体積の最大値

3.1 問題

半径1の球に内接する円柱 C を考える。

- (1) C の体積を, C の高さを x とおいて x の式で表せ。
- (2) C の体積の最大値を求めよ。

3.2 解答



- (1) 題の球を S とする。球と円柱の対称性から, C の2底面の中心同士を結ぶ線分の中点が S の中心 O と一致する。 O から C の1つの底面 D の中心に下ろした線は垂線で, その足を H とすると, $OH = \frac{x}{2}$ である。また, O と, 底面 D の周上の1点 P を結んだ線を考えて, $OP = (S \text{ の半径}) = 1$ である。 $\triangle OPH$ において三平方の定理を用いると,

$$OP^2 = OH^2 + PH^2$$

すなわち

$$1^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + PH^2$$

となり,

$$PH^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

である。また PH は D の半径である。よって, C の体積 $V(x)$ は

$$\begin{aligned} V(x) &= PH^2 \cdot \pi \cdot x \\ &= \pi \left(x - \frac{x^3}{4} \right) \end{aligned}$$

である。

- (2) x の値のとりうる範囲は, 球の直径が2であることを考えると

$$0 < x < 2$$

である。この範囲で (1) で求めた $V(x)$ の最大値を考える。

$$V'(x) = \pi \left(1 - \frac{3}{4}x^2 \right)$$

$$= \pi \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

より、 $V(x)$ の増減表を作ると次のようになる。

x	0	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	2
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	(極大)	↘	

$V(x)$ は $0 < x < 2$ において、 $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のときに極大かつ最大となり、その値は

$$\begin{aligned} V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\right) \\ &= \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi \end{aligned}$$

である。

3.3 解説

図形の量の最大・最小を微分で求める問題です。まず1つの文字（ここでは高さ x ）を選び、求めたい量をその文字だけの式で表すことが出発点になります。

- (1) 円柱の底面の半径が分かれば体積は表せるので、半径を x で表すことを考えます。球の中心、底面の中心、底面の周上の1点を頂点とする直角三角形に三平方の定理を用いると、底面の半径の2乗が $1 - \frac{x^2}{4}$ と求まります。半径そのものではなく2乗のまま扱えば、体積が $\pi \times (\text{底面の半径の2乗}) \times (\text{高さ})$ の形で根号なしのきれいな式になり、あとの微分が楽になります。
- (2) x のとりうる範囲を忘れないようにしましょう。高さは正で、球の直径2を超えられないので $0 < x < 2$ です。この範囲で $V(x)$ を微分し、増減表を書いて極大かつ最大となる x を求めます。 $V'(x) = 0$ を解くと $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ が得られ、これは範囲 $0 < x < 2$ の内部にあるので確かに最大値を与えます。範囲を定めずに機械的に微分してしまうと、定義域の端の扱いを誤ることがあるので注意してください。

3.4 採点

【第3問 14点】

- (1) 6点
- (2) 8点

4 第4問：接線とその本数

4.1 問題

座標平面上に、2つの曲線 P , Q と1つの直線 R を次のように定める。

$$P: y = x^2 + 2x + 1$$

$$Q: y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$

$$R: y = -x + 1$$

また、 a , b , c , d を実数とする。

- (1) 曲線 P の点 $(a, a^2 + 2a + 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 P に、直線 R 上の点 $(b, -b + 1)$ から引ける接線の本数を求めよ。
- (3) 曲線 Q の点 $(c, c^3 + 2c^2 - 4c + 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (4) $d \geq 0$ とする。曲線 Q に、直線 R 上の点 $(d, -d + 1)$ から引ける接線の本数を求めよ。

4.2 解答

- (1) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ とする。曲線 P の x 座標が a である点における接線の傾きは

$$f'(a) = 2a + 2$$

だから、求める接線の方程式は

$$y - a^2 - 2a - 1 = (2a + 2)(x - a)$$

と表される。整理すると次のような方程式になる。

$$y = (2a + 2)x - a^2 + 1 \tag{4.1}$$

- (2) 曲線 P の x 座標が a である点における接線 (4.1) が点 $(b, -b + 1)$ を通るとする。このとき、方程式 (4.1) に座標を代入した

$$-b + 1 = (2a + 2)b - a^2 + 1$$

すなわち

$$a^2 - 2ba - 3b = 0$$

が成り立つ。この式を満たす実数 a の個数が、条件を満たす接線の本数である。この式を a についての2次方程式と見て、判別式の $1/4$ 倍

$$D/4 = b^2 + 3b = b(b + 3)$$

が正、0、負のどれになるかで場合分けすると、実数解の個数すなわち題の接線の本数は

$$\begin{cases} 2 & (b < -3 \text{ または } b > 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (b = -3 \text{ または } b = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (-3 < b < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

- (3) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ とする。曲線 Q の x 座標が c である点における接線の傾きは

$$g'(c) = 3c^2 + 4c - 4$$

だから、求める接線の方程式は

$$y - c^3 - 2c^2 + 4c - 1 = (3c^2 + 4c - 4)(x - c)$$

と表される。整理すると次のような方程式になる。

$$y = (3c^2 + 4c - 4)x - 2c^3 - 2c^2 + 1 \quad (4.2)$$

- (4) 曲線 Q の x 座標が c である点における接線 (4.2) が点 $(d, -d + 1)$ を通るとする。このとき、方程式 (4.2) に座標を代入した

$$-d + 1 = (3c^2 + 4c - 4)d - 2c^3 - 2c^2 + 1$$

すなわち

$$2c^3 + (2 - 3d)c^2 - 4dc + 3d = 0 \quad (4.3)$$

が成り立つ。この式を満たす実数 c の個数が、条件を満たす接線の本数である。この式を c についての 3 次方程式と見て、その相異なる解の個数を調べる。(4.3) の左辺を c についての関数 $h(c)$ 、すなわち

$$h(c) = 2c^3 + (2 - 3d)c^2 - 4dc + 3d$$

とする。その導関数は

$$h'(c) = 6c^2 + 2(2 - 3d)c - 4d = 2(3c + 2)(c - d)$$

である。 $d \geq 0$ より、 $h(c)$ の増減表は次のようになる。

c		$-\frac{2}{3}$		d	
$h'(c)$	+	0	-	0	+
$h(c)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

また、極大値 $h\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{3}d + \frac{8}{27}$ は $d \geq 0$ において常に正であるから、方程式 $h(c) = 0$ の実数解の個数は、極小値 $h(d)$ と 0 の大小関係で次のように決まる。

$$\begin{cases} 3 & (h(d) < 0 \text{ のとき}) \\ 2 & (h(d) = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (h(d) > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$h(d)$ を求めると

$$h(d) = -d^3 - 2d^2 + 3d = -d(d - 1)(d + 3)$$

で、 $d + 3$ は $d \geq 0$ において常に正であるから、 c についての 3 次方程式 (4.3) の相異なる解の個数、すなわち題の接線の本数は

$$\begin{cases} 3 & (1 < d \text{ のとき}) \\ 2 & (d = 0 \text{ または } d = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 < d < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

4.3 解説

$y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

で与えられます。(1)(3) はこれを用いて接線の方程式を求めます。(2)(4) は、接線が通る点の座標を接線の方程式に代入して、実数解の個数が接点の個数で、すなわち接線の本数になります。(2) は 2 次式のため、判別式を用いることで解決できます。(4) は 3 次式のため、極大値が正になっていることから、極小値の値によって解の個数が分かれることになります。 $d \geq 0$ に注意することで余計な場合分けを省くことができます。

必ず (接点の個数) = (接線の本数) となるのは、接線を考える曲線が 3 次以下の式である場合のみで、4 次以上の式であれば、同一の直線が曲線上の 2 個以上の点と接する場合があります。

4.4 採点

【第4問 23点】

(1) 4点

- 微分係数を正しく求められたか。それを使って接線の方程式を求められたか。

(2) 6点

- 2 次方程式の解の個数に帰着できたか。

(3) 4点

- 微分係数を正しく求められたか。それを使って接線の方程式を求められたか。

(4) 9点

- 3 次方程式の解の個数に帰着できたか。
- 極大と極小の正負の問題に帰着できたか。

5 第5問：3次関数の方程式と不等式

5.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) a を実数の定数とする。 x についての方程式

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = a$$

の相異なる実数解の個数を求めよ。

- (2) $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x について、不等式

$$x^3 - x^2 \geq k \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2} \right)$$

が成り立つような実数 k の条件を求めよ。ただし、 $k \geq 0$ とする。

5.2 解答

- (1) この方程式の実数解の個数は、座標平面における、曲線 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ と直線 $y = a$ の共有点の個数ということができる。この曲線を表す方の関数を $f(x)$ ，すなわち

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

とする。

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

より、増減表は次のようになる。

x		-1		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	8	↘	-19	↗

$y = f(x)$ のグラフは図 5.1 のようになる。

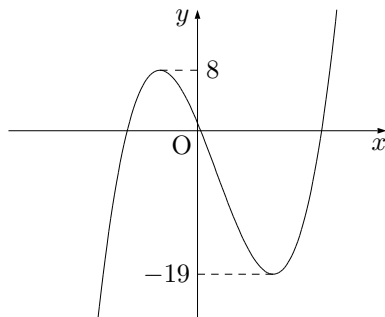


図 5.1: $y = f(x)$

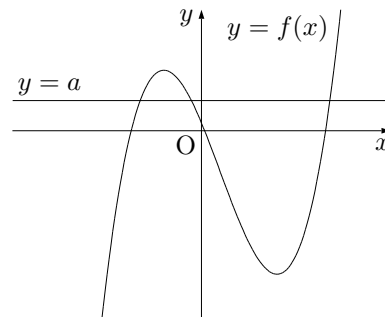


図 5.2: $y = f(x)$ と $y = a$

図 5.2 のように $y = f(x)$ と $y = a$ の共有点の個数を考え、相異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 3 & (-19 < a < 8 \text{ のとき}) \\ 2 & (a = -19 \text{ または } a = 8 \text{ のとき}) \\ 1 & (a < -19 \text{ または } a > 8 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(2) 与式を移項し、整理すると、

$$x^3 - \left(\frac{3}{2}k + 1\right)x^2 + 2kx + \frac{3}{2}k \geq 0$$

となる。この左辺を x の関数 $g(x)$ とおく。すなわち

$$g(x) = x^3 - \left(\frac{3}{2}k + 1\right)x^2 + 2kx + \frac{3}{2}k$$

である。題意を満たす k の条件は、「 $x \geq 0$ における、 $g(x)$ の最小値が 0 以上である。」が成り立つような実数 k (ただし $k \geq 0$) の条件と同値である。

$g(x)$ の増減を調べるために、導関数 $g'(x)$ を求めると次の通り。

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - (3k + 2)x + 2k \\ &= (3x - 2)(x - k) \end{aligned}$$

(i) $k \neq \frac{2}{3}$ のときを考える。

$k \geq 0$ より $g(x)$ は $x \geq 0$ で極大値と極小値をもつ。このとき、 $g(x)$ の $x \geq 0$ における最小値は、 $g(0)$ 、 $g\left(\frac{2}{3}\right)$ 、 $g(k)$ のいずれかである。よって、

$$g(0) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad g\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0 \quad \text{かつ} \quad g(k) \geq 0 \quad (5.1)$$

を満たす k の範囲を求めれば良い。それぞれを k の式で表すと、

$$\begin{aligned} g(0) \geq 0 &\iff \frac{3}{2}k \geq 0 \iff k \geq 0, \\ g\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0 &\iff \frac{13}{6}k - \frac{4}{27} \geq 0 \iff k \geq \frac{8}{117}, \\ g(k) \geq 0 &\iff -\frac{1}{2}k^3 + k^2 + \frac{3}{2}k \geq 0 \\ &\iff -\frac{1}{2}k(k-3)(k+1) \geq 0 \\ &\iff -\frac{1}{2}k(k-3) \geq 0 \quad (k \geq 0 \text{ より } k+1 > 0) \\ &\iff k(k-3) \leq 0 \\ &\iff 0 \leq k \leq 3 \end{aligned}$$

だから

$$(5.1) \iff \frac{8}{117} \leq k \leq 3 \quad \left(k \neq \frac{2}{3}\right)$$

である。

(ii) $k = \frac{2}{3}$ のときを考える。

$g'(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$ は常に 0 以上だから、 $g(x)$ は単調増加である。よって $x \geq 0$ における $g(x)$ の最小値は $g(0)$ だから、 $g(0) \geq 0$ が成り立てばよいが、 $g(0) = 1$ であり、これ

は条件を満たしている。ゆえに $k = \frac{2}{3}$ は条件を満たす。

以上より、題意を満たす k の範囲は次で与えられる。

$$\frac{8}{117} \leq k \leq 3$$

5.3 解説

3次関数の微分を、方程式の実数解の個数や不等式の成立条件に応用する問題です。

- 文字定数を含む方程式の実数解の個数は、定数を分離して曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数に読み替える（定数分離）。
 - すべての x で不等式が成り立つ条件は、「(左辺) - (右辺) の最小値が 0 以上」に読み替える。
- (1) 与式はすでに右辺が a の形なので、 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ のグラフと水平な直線 $y = a$ の共有点の個数を数えます。増減表からグラフを描き、 a を上下に動かして、 a が極大値・極小値と一致する高さで共有点の個数が変わる様子を捉えます。極値の値が個数の境目になります。
- (2) 移項して $g(x) = x^3 - \left(\frac{3}{2}k + 1\right)x^2 + 2kx + \frac{3}{2}k$ とおくと、題意は「 $x \geq 0$ における $g(x)$ の最小値が 0 以上」と同値です。 $g'(x) = (3x - 2)(x - k)$ の零点は $x = \frac{2}{3}, k$ なので、 $x \geq 0$ での最小値の候補は $g(0), g\left(\frac{2}{3}\right), g(k)$ の 3 つです。ここで、どれが最小かを k と $\frac{2}{3}$ の大小で場合分けする代わりに、「候補すべてが 0 以上」という条件を課すと、場合分けを避けて一気に条件を求められるのが工夫です。ただし $g'(x)$ が重解をもつ $k = \frac{2}{3}$ のときは $g(x)$ が単調増加になり別扱いが要るので、因数分解できても重解の場合を見落とさないよう注意します。

5.4 採点

【第5問 19点】

- (1) 8点
- 曲線と直線の共有点の個数という問題に帰着できたか。
 - 極値を求めて a の値によって場合分けができたか。
- (2) 11点
- 最小値が 0 以上になるという問題に言い換えられたか。
 - 極値を持つ場合と持たない場合に分けられたか。極値を持つ場合は、どのような x が最小値を与えるかを得られたか。それぞれを正しく計算できたか。

6 第6問：導関数の定義と微分

6.1 問題

$a, b, k, l, \alpha, \beta$ を実数とし、関数 $f(x), g(x)$ を考える。極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

は、 x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき、 $f(x)$ が限りなく α に近づくことを表し、 $f(x)$ は α に収束するという。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とすると、次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k\alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

分子を有理化することで、分母を 0 以外の値に収束させることができる場合がある。例えば、極限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ を考える。 $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ の分子と分母は $x \rightarrow 2$ において 0 に収束するが、分子と分母に $\sqrt{x} + \sqrt{2}$ をかけることによって、分母を 0 でない値に収束させることができる。次の式でその過程を示した。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

この方法は $\sqrt{x}$ を x について微分するとき有効である。

これ以外でも、 $a \pm b = \frac{a^2 - b^2}{a \mp b}$ (複号同順) を用いることで、極限の計算を行える場合がある。例えば、関数 $\sin x$ を x について微分するとき、三角関数の加法定理に加えて、 $\cos h \neq -1$ を満たす実数 h において

$$1 - \cos h = \frac{1 - \cos^2 h}{1 + \cos h}$$

であること、および $\sin^2 h + \cos^2 h = 1$ を用いることで、極限の計算ができる。

- (1) 次のように $P(x), Q(x)$ を定義する。

$$P(x) = kf(x) + lg(x), \quad Q(x) = f(x)g(x)$$

導関数の定義を用いて $P(x)$ と $Q(x)$ をそれぞれ x について微分し、次の等式を示せ。

$$P'(x) = kf'(x) + lg'(x), \quad Q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- (2) 関数 $\sqrt{x}$ ($x > 0$) を、 x について、定義に従って微分し、その過程と結論を述べよ。
- (3) 関数 $\sin x$ を、 x について、定義に従って微分し、その過程と結論を述べよ。必要ならば、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ を用いてもよい。

6.2 解答

- (1) 導関数 $P'(x), Q'(x)$ を求めると次の通り。

$$P'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{kf(x+h) + lg(x+h)\} - \{kf(x) + lg(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + l \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= kf'(x) + lg'(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

ここで、 $g(x)$ は微分可能なので連続であり、 $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ であることを用いた。よって等式は示された。

(2) $y = \sqrt{x}$ とする。

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

(3) $y = \sin x$ とする。

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} \right) \tag{6.1}
\end{aligned}$$

ところで、

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h} \right) \\
&= 1 \cdot \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned}
\text{式 (6.1)} &= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

となる。よって $\sin x$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ は

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

である。

6.3 解説

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

に立ち返って微分する問題です。極限は $\frac{0}{0}$ の形になるので、共通因数の約分・分子の有理化・三角関数の変形によって、分母が0に収束しない形に直すのがポイントです。問題文で与えられたヒント（有理化、 $1 - \cos h$ の変形、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ ）を活用します。

- (1) 定義式に $P(x) = kf(x) + lg(x)$, $Q(x) = f(x)g(x)$ を代入して整理します。線形性のほうは、 k と l でくくれば f, g それぞれの差の商が現れます。積の微分では、分子に $-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)$ を補って2つの差の商に分けるのがこつで、これにより $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の形が得られます。
- (2) 分子 $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ を有理化します。分子と分母に $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ を掛けると分子が h になって h と約分でき、 $h \rightarrow 0$ として $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ が得られます。
- (3) 加法定理で $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ と展開すると、 $\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h}$ の形になります。 $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ はヒントの通りで、 $\frac{1 - \cos h}{h}$ は $1 - \cos h = \frac{1 - \cos^2 h}{1 + \cos h} = \frac{\sin^2 h}{1 + \cos h}$ と変形すると $\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$ となります。よって導関数は $\cos x$ です。

6.4 採点

【第6問 14点】

- (1) 6点
 - $P'(x)$ と $Q'(x)$ のそれぞれに3点。
- (2) 4点
- (3) 4点