

確 認 試 験 問 題

指 数 と 対 数

(配点 100 点)

(日付) 年 月 日

(開始)

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 ~ (90 分) ~

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 (終了)

注 意 事 項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 7 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 6 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 6 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 14)

- (1) a を実数, n を自然数とする。 a の n 乗根の定義を述べよ。また, $\sqrt[n]{a}$ の定義を述べよ。
- (2) 対数の定義を述べよ。
- (3) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。
- (4) a, b, c を 1 でない正の数とする。次の 4 式の値はすべて等しいことを証明せよ。

$$\log_a b, \quad (\log_a c)(\log_c b), \quad \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_{a^c} b^c$$

第 2 問

(配点 18)

問い A, B に答えよ。

A

以下の 3 数の大小を比較せよ。

$$(1) \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[4]{\frac{1}{8}}, \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$$

$$(2) \log_2 6, 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}, \frac{1}{\log_7 2}$$

B

以下の式をそれぞれ計算し, その値を整数で答えよ。

$$(3) \sqrt[4]{27 \cdot 8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[12]{\frac{2}{3}}$$

$$(4) 25^{2 \log_5 7} \cdot 35^{-3} \cdot 27^{\log_3 5}$$

$$(5) \log_2 \frac{1}{3\sqrt{2}} + 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{6}} + \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$(6) (\log_2 3 + \log_{\sqrt{2}} 3) (\log_3 2 + \log_{\sqrt{3}} 2)$$

第 3 問

(配点 18)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 実数 a, b, c, d, k が, 等式 $2^a = 3^b = 6^c = d$, $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ を満たしている。 d が $2 \leq d \leq 4$ を満たすとき, k のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $x \leq 2$ で定義される関数 $y = 4^{x+\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2^{x+1} + 1$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) 実数 x, y が $2 \leq x, 4 \leq y, x^2 y = 128$ を満たしているとき, $(\log_2 x)(\log_2 y)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

第 4 問

(配点 16)

以下の x についての方程式をそれぞれ解け。

(1) $7^{3x} - 13 \cdot 49^x + 47 \cdot 7^x = 35$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 = 0$

(3) $2\log_2(x+3) - \log_2(3x+5) = 1$

(4) $\log_3 x^2 + \log_x \sqrt{3} = 4$

第 5 問

(配点 16)

以下の x についての不等式をそれぞれ解け。

(1) $4^x - 2^{x+2} \geq 32$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} - 27 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10 < 0$

(3) $\log_{\sqrt{3}}(2x+3) > \log_3(x^2+1) + 1$

(4) $\log_{x+2}|x+1| > \log_{(x+2)^2}(3-x)$

第 6 問

(配点 18)

通常使われている数の表記法は、各桁を 0 から 9 までの 10 個の数字を用いて表す 10 進法であり、この記法で表された数を 10 進数という。10 進数で n 桁の自然数 N は、0 以上 9 以下の整数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ および 1 以上 9 以下の整数 a_{n-1} を用いて

$$N = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

と表され、不等式 $10^{n-1} \leq N < 10^n$ を満たす。特に、最高位の数字が a と分かっている場合、 N は不等式 $a \cdot 10^{n-1} \leq N < (a+1) \cdot 10^{n-1}$ を満たす。

また、1 より小さい正の数 K について、小数第 1 位から順に見ていき、小数第 k 位に初めて 0 でない数が現れるとき、1 以上 9 以下の整数 k_0 と 0 以上 9 以下の整数 $k_1, k_2, \dots$ を用いて

$$K = k_0 \cdot 10^{-k} + k_1 \cdot 10^{-(k+1)} + k_2 \cdot 10^{-(k+2)} + \cdots$$

と表され、不等式 $10^{-k} \leq K < 10^{-k+1}$ を満たす。

7 進法とは、7 種類の記号、特に 0 から 6 までの 7 個の数字を用いて数を表す方法であり、この記法で表された数を 7 進数という。7 進数で m 桁の自然数 M は、10 進法では 0 以上 6 以下の整数 $b_0, b_1, \dots, b_{m-2}$ および 1 以上 6 以下の整数 b_{m-1} を用いて

$$M = b_{m-1} \cdot 7^{m-1} + b_{m-2} \cdot 7^{m-2} + \cdots + b_1 \cdot 7^1 + b_0 \cdot 7^0$$

と表され、不等式 $7^{m-1} \leq M < 7^m$ を満たす。特に、最高位の数字が b と分かっている場合、 M は不等式 $b \cdot 7^{m-1} \leq M < (b+1) \cdot 7^{m-1}$ を満たす。

以下の問いに答えよ。ただし、特に断りなく書かれる数は 10 進法で表記されているものとする。また、対数の値については、次の表に示される不等式を利用してよい。

表 6.1: 対数の値が満たす不等式

$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$	$0.3562 < \log_7 2 < 0.3563$
$0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$	$0.5645 < \log_7 3 < 0.5646$
$0.845 < \log_{10} 7 < 0.8451$	$0.827 < \log_7 5 < 0.8271$

- (1) 6^{50} は何桁の整数であるか答えよ。また、最高位の数字を求めよ。
- (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{30}$ を小数第 1 位から順に見ていくとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか答えよ。
- (3) 8^{20} を 7 進法で表すと何桁の整数になるか答えよ。また、最高位の数字を求めよ。
- (4) 表 6.1 に示されているのは 6 つの対数のみであるが、計算によって底および真数が 2 以上 10 以下の整数である対数の値は不等式で表すことができる。 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$, $\log_7 5 = c$ とおくとき、 $\log_5 3$ と $\log_7 6$ を $\log$ を用いない a, b, c の式で表せ。