
確 認 試 験 問 題

指 数 と 対 数

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：指数と対数の定義と性質

1.1 問題

- (1) a を実数, n を自然数とする。 a の n 乗根の定義を述べよ。また, $\sqrt[n]{a}$ の定義を述べよ。
- (2) 対数の定義を述べよ。
- (3) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。
- (4) a, b, c を 1 でない正の数とする。次の 4 式の値はすべて等しいことを証明せよ。

$$\log_a b, (\log_a c)(\log_c b), \frac{1}{\log_b a}, \log_{a^c} b^c$$

1.2 解答

- (1) n 乗すると a になる数を a の n 乗根という。また, $\sqrt[n]{a}$ は次の通り。
 - $a > 0$ のとき, $\sqrt[n]{a}$ は a の n 乗根のうち正の実数であるもの。
 - $a = 0$ のとき, $\sqrt[n]{a} = 0$ である。
 - $a < 0$ のとき, $\sqrt[n]{a}$ は n が奇数であれば存在し, a の n 乗根のうち実数であるもの。
- (2) a を 1 でない正の数, P を正の数とすると, $a^x = P$ と $x = \log_a P$ は同値である。これにより対数が定義される。
- (3) 背理法により示す。 $\log_2 3$ が有理数であると仮定する。対数の底と真数が共に 1 より大きいことより, この値は正であることに注意すると, 互いに素な自然数 m, n を用いて $\log_2 3 = \frac{n}{m}$ と表すことができる。これは (2) を用いると $2^{\frac{n}{m}} = 3$ となり, さらに両辺を m 乗して

$$2^n = 3^m$$

となる。しかし, この左辺は素因数 2 のみを持つのに対し, 右辺は素因数 3 のみを持ち, 素因数分解の一意性に反するから, この等式は成り立たない。よって仮定は否定され, $\log_2 3$ は無理数であると結論付けられる。

- (4) 底の変換公式を用いて 2, 3, 4 式目を式変形すると,

$$\begin{aligned} (\log_a c)(\log_c b) &= (\log_a c) \cdot \frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_a b \\ \frac{1}{\log_b a} &= 1 \div (\log_b a) = 1 \div \frac{\log_a a}{\log_a b} = 1 \div \frac{1}{\log_a b} = 1 \cdot \log_a b = \log_a b \\ \log_{a^c} b^c &= \frac{\log_a b^c}{\log_a a^c} = \frac{c \log_a b}{c \log_a a} = \log_a b \end{aligned}$$

となり, 1 式目と等しくなる。よってこれらの式の値はすべて等しい。

1.3 解説

定義や基本性質を問う問題です。用語の定義を正確に述べられるか, また対数の基本公式を使いこなせるかがポイントになります。

対数について、 a を1でない正の数、 P を正の数とすると、 $a^x = P$ と $x = \log_a P$ が同値であることが定義でした。ここから

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0$$

などがただちに従います。また、 a, b, c を1でない正の数とすると、底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

が成り立ちます。(4) ではこの公式を繰り返し用います。

- (1) まず a の n 乗根とは、 n 乗すると a になる数のことです。これは1つとは限らず、たとえば正の実数 a に対して2乗根は正負の2つあります。一方 $\sqrt[n]{a}$ は n 乗根のうち特定の1つを指す記号で、 a の符号と n の偶奇によって存在の有無や選び方が変わる点に注意して場合分けをします。「 n 乗根」と「 $\sqrt[n]{a}$ 」を混同しないことが大切です。
- (2) 上で述べた定義を述べれば十分です。底が1でない正の数であること、真数が正であることという条件を落とさないようにします。
- (3) 無理数であることの証明は、有理数であると仮定して矛盾を導く背理法が定石です。 $\log_2 3 = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数) とおき、対数の定義に戻して $2^n = 3^m$ の形の整数の等式を作るのがポイントです。左辺は2の冪、右辺は3の冪ですから、素因数分解の一意性より両者は一致し得ず、矛盾が導かれます。値が正であることを先に確認しておくと、 $\frac{n}{m}$ と表す際に符号を気にせずに済みます。
- (4) 4つの式がすべて $\log_a b$ に等しいことを示します。 $\log_a b$ を基準に選び、残りの3つを底の変換公式で a を底とする対数に書き直すと、いずれも $\log_a b$ に一致します。3つ目の $\frac{1}{\log_b a}$ では $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ (逆数の関係) を、4つ目の $\log_{a^c} b^c$ では $\log_a a^c = c$, $\log_a b^c = c \log_a b$ を用います。どの式を基準にそろえるかを最初に決めておくと、見通しよく変形できます。

1.4 採点

【第1問 14点】

- (1) 3点
- (2) 3点
- (3) 4点
- (4) 4点

2 第2問：指数と対数の値

2.1 問題

問い A, B に答えよ。

A

以下の3数の大小を比較せよ。

- (1) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[4]{\frac{1}{8}}, \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$
 (2) $\log_2 6, 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}, \frac{1}{\log_7 2}$

B

以下の式をそれぞれ計算し、その値を整数で答えよ。

- (3) $\sqrt[4]{27 \cdot 8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[12]{\frac{2}{3}}$
 (4) $25^{2 \log_5 7} \cdot 35^{-3} \cdot 27^{\log_3 5}$
 (5) $\log_2 \frac{1}{3\sqrt{2}} + 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{6}} + \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$
 (6) $(\log_2 3 + \log_{\sqrt{2}} 3)(\log_3 2 + \log_{\sqrt{3}} 2)$

2.2 解答

- (1) 3数それぞれを、 $\frac{1}{2}$ の冪乗の形で表すと、

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$$

となる。指数部分を比較すると、

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

であり、底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいため、冪乗全体では不等号の向きが反転し、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

である。従って、大小関係は次の通りである。

$$\sqrt[5]{\frac{1}{16}} < \sqrt[4]{\frac{1}{8}} < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

(2) 3数それぞれを底を2とする対数で表す。

$$\log_2 6$$

$$2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{\log_2 \frac{2}{5}}{\log_2 \frac{1}{2}} = 2 \cdot (-1) \cdot \log_2 \frac{2}{5} = \log_2 \left(\frac{2}{5} \right)^{-2} = \log_2 \frac{25}{4}$$

$$\frac{1}{\log_7 2} = \log_2 7$$

真数を比較すると

$$6 < \frac{25}{4} < 7$$

であり、対数の底2は1より大きいため、真数の大小がそのまま対数の大小となるから、

$$\log_2 6 < \log_2 \frac{25}{4} < \log_2 7$$

である。従って、大小関係は次の通りである。

$$\log_2 6 < 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} < \frac{1}{\log_7 2}$$

(3)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (3^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}) \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot (2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{1}{6}}) \cdot (2^{\frac{1}{12}} \cdot 3^{-\frac{1}{12}}) \\ &= 3^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}} \cdot 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}} \\ &= 3^0 \cdot 2^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (5^2)^{2 \log_5 7} \cdot (5 \cdot 7)^{-3} \cdot (3^3)^{\log_3 5} \\ &= 5^{4 \log_5 7} \cdot 5^{-3} \cdot 7^{-3} \cdot 3^{3 \log_3 5} \\ &= (5^{\log_5 7})^4 \cdot 5^{-3} \cdot 7^{-3} \cdot (3^{\log_3 5})^3 \\ &= 7^4 \cdot 5^{-3} \cdot 7^{-3} \cdot 5^3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \log_2 \frac{1}{3\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{\log_2 \frac{2}{\sqrt{6}}}{\log_2 \frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ &= \log_2 \frac{1}{3\sqrt{2}} + (-2) \cdot \log_2 \frac{2}{\sqrt{6}} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2 \frac{1}{3\sqrt{2}} + \log_2 \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{4} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= -1$$

(6)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} \right) \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{3}} \right) \\ &= \left(\log_2 3 + (\log_2 3) \div \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\log_2 3} + 1 \div \left(\frac{1}{2} \log_2 3 \right) \right) \\ &= (\log_2 3 + 2 \log_2 3) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{2}{\log_2 3} \right) \\ &= 3 \log_2 3 \cdot \frac{3}{\log_2 3} \\ &= 9 \end{aligned}$$

2.3 解説

指数法則と対数の性質を用いる計算・大小比較の問題です。底をそろえること、底が1より大きいのか小さいかで不等号の向きが変わることに注意しましょう。

(1) 3数をいずれも底 $\frac{1}{2}$ の冪乗の形にそろえると、指数部分の大小だけで比較できます。指数は $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ ですが、底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいので、冪乗全体では不等号の向きが反転することに注意しましょう。

(2) 3数を底2の対数にそろえます。底の変換公式から $2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} = \log_2 \frac{25}{4}$, $\frac{1}{\log_7 2} = \log_2 7$ となり、3数はそれぞれ $\log_2 6$, $\log_2 \frac{25}{4}$, $\log_2 7$ と表せます。底2は1より大きいので、真数の大小 $6 < \frac{25}{4} < 7$ がそのまま対数の大小になります。

(3) 根号をすべて分数の指数に直し、2の冪と3の冪に分けて指数を足し合わせます。3の指数の和がちょうど0になり、値は2になります。

(4) $25 = 5^2$, $35 = 5 \cdot 7$, $27 = 3^3$ と底をそろえたうえで、 $a^{\log_a b} = b$ (例えば $5^{\log_5 7} = 7$, $3^{\log_3 5} = 5$)を用いると、5と7の冪の積に整理でき、値は7になります。

(5) 底の変換公式で底を2にそろえます。 $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ であることや、 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と見て第3項が $\frac{1}{2}$ になることを使うと、全体を $\log_2(\text{真数})$ と定数の和に整理でき、値は-1になります。

(6) 底の変換公式で $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2 \log_2 3$, $\log_{\sqrt{3}} 2 = 2 \log_3 2$ のように直すと、前の因数は $3 \log_2 3$, 後の因数は $\frac{3}{\log_2 3}$ となり、積は9になります。

2.4 採点

【第2問 18点】

- (1) 3点
- (2) 3点
- (3) 3点
- (4) 3点

(5) 3点

(6) 3点

3 第3問：指数と対数の値のとりうる範囲

3.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 実数 a, b, c, d, k が、等式 $2^a = 3^b = 6^c = d$, $k = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ を満たしている。 d が $2 \leq d \leq 4$ を満たすとき、 k のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $x \leq 2$ で定義される関数 $y = 4^{x+\frac{1}{2}} + 3 \cdot 2^{x+1} + 1$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) 実数 x, y が $2 \leq x, 4 \leq y, x^2 y = 128$ を満たしているとき、 $(\log_2 x)(\log_2 y)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

3.2 解答

- (1) $2^a = 3^b = 6^c = d$ に底 2 の対数をとると次のようになる。

$$a = b \log_2 3 = c \log_2 6 = \log_2 d$$

a, b, c を d を用いて表すと次の通り。

$$a = \log_2 d, \quad b = \frac{\log_2 d}{\log_2 3}, \quad c = \frac{\log_2 d}{\log_2 6}$$

従って、 k を d を用いて表すと

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\log_2 d} - \frac{\log_2 3}{\log_2 d} + \frac{\log_2 6}{\log_2 d} \\ &= \frac{1 + \log_2 6 - \log_2 3}{\log_2 d} \\ &= \frac{1 + \log_2 2}{\log_2 d} \\ &= \frac{2}{\log_2 d} \end{aligned}$$

である。 d の範囲は $2 \leq d \leq 4$ だから、 $\log_2 d$ の範囲は $\log_2 2 \leq \log_2 d \leq \log_2 4$ すなわち $1 \leq \log_2 d \leq 2$ である。よって

$$\frac{2}{2} \leq \frac{2}{\log_2 d} \leq \frac{2}{1}$$

より k の範囲は

$$1 \leq k \leq 2$$

である。

- (2) $2^x = t$ とおくと、 $x \leq 2$ より t の範囲は $0 < t \leq 4$ である。また y を t の式で表すと

$$\begin{aligned} y &= 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^x + 6 \cdot 2^x + 1 \\ &= 2t^2 + 6t + 1 \\ &= 2\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。 y は $0 < t \leq 4$ の範囲で t の増加と共に増加し、

- $t \rightarrow 0$ のとき y は $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 1$ に近づく（この値はとらない）
- $t = 4$ を代入すると $y = 2 \cdot \left(4 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 57$

となるから、 y のとりうる値の範囲は

$$1 < y \leq 57$$

である。

- (3) $\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$, $(\log_2 x)(\log_2 y) = k$ とおく。与えられた 3 つの条件に底 2 の対数をとると、

$$\log_2 2 \leq \log_2 x, \quad \log_2 4 \leq \log_2 y, \quad \log_2(x^2 y) = \log_2 128$$

となる。これと $k = (\log_2 x)(\log_2 y) = XY$ をそれぞれ整理して x , y の式を X , Y の式で表すと

$$\begin{cases} 1 \leq X \\ 2 \leq Y \\ 2X + Y = 7 \\ k = XY \end{cases}$$

となる。この 3 式目を変形して $Y = 7 - 2X$ とし、2 式目と 4 式目に代入して Y を消去すると、

$$\begin{cases} 1 \leq X \\ 2 \leq 7 - 2X \\ k = X(7 - 2X) \end{cases}$$

となる。この 2 式目を整理すると $X \leq \frac{5}{2}$ となるから、1 式目と合わせて X の範囲を作り、さらに 3 式目を平方完成して

$$k = -2\left(X - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{49}{8} \quad \left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right)$$

である。この 2 次関数は得られた範囲で

- $X = \frac{7}{4}$ のとき最大値 $k = \frac{49}{8}$
- $X = 1$ と $X = \frac{5}{2}$ のとき最小値 $k = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{49}{8} = 5$

をとることより、 $k = (\log_2 x)(\log_2 y)$ のとりうる値の範囲は

$$5 \leq (\log_2 x)(\log_2 y) \leq \frac{49}{8}$$

である。

3.3 解説

- (1) は $\log_2 d$ 以外で k を表すことも可能です。

$$a = b \log_2 3 = c \log_2 6 = \log_2 d$$

から

$$b = \frac{a}{\log_2 3}, \quad c = \frac{a}{\log_2 6}, \quad a = \log_2 d$$

とし,

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{a} - \frac{\log_2 3}{a} + \frac{\log_2 6}{a} \\&= \frac{2}{a}\end{aligned}$$

の $1 \leq a \leq 2$ における範囲として $1 \leq k \leq 2$ を得ます。

- (1) $1 \leq \log_2 d \leq 2$ を求められるかがポイントです。
- (2) $t \leq 4$ としないよう注意。指数関数のグラフから、 $0 < t$ であることが分かります。

3.4 採点

【第3問 18点】

(1) 6点

- k を a や d など単一の文字で表せたか。
- 用いた文字の範囲を求められたか。

(2) 6点

- 2次関数の値域の問題に帰着できたか。
- 定義域はうまく変換できたか。

(3) 6点

- 2次関数の値域の問題に帰着できたか。

4 第4問：指数と対数の方程式

4.1 問題

以下の x についての方程式をそれぞれ解け。

- (1) $7^{3x} - 13 \cdot 49^x + 47 \cdot 7^x = 35$
- (2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 = 0$
- (3) $2\log_2(x+3) - \log_2(3x+5) = 1$
- (4) $\log_3 x^2 + \log_x \sqrt{3} = 4$

4.2 解答

(1)

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &\iff 7^{3x} - 13 \cdot 7^{2x} + 47 \cdot 7^x - 35 = 0 \\
 &\iff (7^x - 1)(7^{2x} - 12 \cdot 7^x + 35) = 0 \\
 &\iff (7^x - 1)(7^x - 5)(7^x - 7) = 0 \\
 &\iff 7^x = 1 \quad \text{または} \quad 7^x = 5 \quad \text{または} \quad 7^x = 7 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{または} \quad x = \log_7 5 \quad \text{または} \quad x = 1
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &\iff \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 = 0 \\
 &\iff \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1\right\} \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right\} = 0 \\
 &\iff \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \quad \text{または} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{または} \quad x = -1
 \end{aligned}$$

- (3) 真数条件より, $x+3 > 0$ かつ $3x+5 > 0$, すなわち $-\frac{5}{3} < x$ であることが必要である。このとき,

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &\iff 2\log_2(x+3) = \log_2(3x+5) + 1 \\
 &\iff \log_2(x+3)^2 = \log_2\{2 \cdot (3x+5)\}
 \end{aligned}$$

の真数部分を比較して,

$$(x+3)^2 = 6x+10$$

を解いて $x = \pm 1$ を得るが, この値はどちらも真数条件から得られた $-\frac{5}{3} < x$ を満たしている。よって解は

$$x = \pm 1$$

である。

- (4) 真数条件より $x^2 > 0$, 底の条件より $0 < x$ かつ $x \neq 1$ である。これらから必要条件 $0 < x$ か

つ $x \neq 1$ を得る。このとき

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) \quad & \iff 2\log_3 |x| + \log_x \sqrt{3} - 4 = 0 \\
 & \iff 2\log_3 x + \log_x \sqrt{3} - 4 = 0 \quad (x > 0 \text{ より } |x| = x) \\
 & \iff 2\log_3 x + \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 x} - 4 = 0 \quad (x \neq 1 \text{ より } \log_3 x \neq 0) \\
 & \iff 2\log_3 x + \frac{1}{2\log_3 x} - 4 = 0 \\
 & \iff 4(\log_3 x)^2 - 8\log_3 x + 1 = 0 \quad (\text{両辺に } 2\log_3 x (\neq 0) \text{ をかける}) \\
 & \iff \log_3 x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & \iff x = 3^{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}
 \end{aligned}$$

となり、得られた

$$x = 3^{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

はどちらも条件 $0 < x$ かつ $x \neq 1$ を満たしているから解となる。

4.3 解説

指数関数・対数関数を含む方程式です。共通する方針は次の通りです。

- 指数方程式は、 $a^x = t$ ($t > 0$) とおいて t についての整式の方程式に直す。 $t > 0$ を満たさない t の値は捨てる。
- 対数方程式は、はじめに底の条件（底は正で1でない）と真数条件（真数は正）を確認し、 x の必要条件を求めておく。最後に、得られた解がその条件を満たすかを検算する。

底や指数がそろっていないときは、指数法則や底の変換公式でそろえてから置き換えるのがコツです。

- (1) $49^x = (7^2)^x = 7^{2x}$ と直すと、すべて 7^x の幂で書けます。 $t = 7^x$ ($t > 0$) とおくと t の3次方程式 $t^3 - 13t^2 + 47t - 35 = 0$ になり、因数分解して $t = 1, 5, 7$ を得ます。いずれも $t > 0$ を満たすので、 $7^x = 1, 5, 7$ からそれぞれ x が求まります。
- (2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ なので、 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ($t > 0$) とおくと t の2次方程式になります。 $t = 1, 3$ と求まったら、 $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ の形に戻して x を求めます。
- (3) まず真数条件 $x + 3 > 0$ かつ $3x + 5 > 0$ から $x > -\frac{5}{3}$ を押さえます。右辺の1を $\log_2 2$ とみて、両辺を1つの対数にまとめると $\log_2 (x+3)^2 = \log_2 \{2(3x+5)\}$ となり、真数を比較して $(x+3)^2 = 2(3x+5)$ が得られます。解 $x = \pm 1$ がどちらも真数条件を満たすことの確認を忘れないようにしましょう。
- (4) 底も真数もそろっていないので変換が必要です。底の条件・真数条件から $x > 0$ かつ $x \neq 1$ を得ます。 $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$ ($x > 0$)、 $\log_x \sqrt{3}$ は底の変換公式で $\frac{1}{2\log_3 x}$ と直せます。 $t = \log_3 x$ ($x \neq 1$ より $t \neq 0$) とおくと $2t + \frac{1}{2t} - 4 = 0$ となり、分母を払った2次方程式

$4t^2 - 8t + 1 = 0$ を解きます。最後に $x = 3^t$ に戻し、条件を満たすことを確認します。

4.4 採点

【第4問 16点】

(1) 4点

- 因数分解できたか。
- 最終的に x について解けたか。

(2) 4点

- 因数分解できたか。
- 最終的に x について解けたか。

(3) 4点

- 真数条件を確認できているか。
- 真数を比較して方程式を解けているか。

(4) 4点

- 真数条件と底の条件を確認できているか。

5 第5問：指数と対数の不等式

5.1 問題

以下の x についての不等式をそれぞれ解け。

- (1) $4^x - 2^{x+2} \geq 32$
 (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} - 27 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10 < 0$
 (3) $\log_{\sqrt{3}}(2x+3) > \log_3(x^2+1) + 1$
 (4) $\log_{x+2}|x+1| > \log_{(x+2)^2}(3-x)$

5.2 解答

(1)

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &\iff 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 32 \geq 0 \\
 &\iff (2^x + 4)(2^x - 8) \geq 0 \\
 &\iff 2^x - 8 \geq 0 \quad (\text{正の値 } 2^x + 4 \text{ で割った}) \\
 &\iff 2^x \geq 8 \\
 &\iff 2^x \geq 2^3 \\
 &\iff x \geq 3
 \end{aligned}$$

(2) 与式を変形し、底を $\frac{1}{5}$ とする冪乗の形を用いて不等式を表現する。

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &\iff \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 27 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10 < 0 \\
 &\iff 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 27 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10 < 0 \\
 &\iff \left\{5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2\right\} \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x - 5\right\} < 0 \\
 &\iff \frac{2}{5} < \left(\frac{1}{5}\right)^x < 5 \\
 &\iff \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{5}} < \left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}
 \end{aligned}$$

底 $\frac{1}{5}$ は 1 より小さいから、指数の大小と冪乗全体の大小は反転し、

$$-1 < x < \log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{5}$$

となって解を得る。右辺を変形すると、

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{5} = \frac{\log_5 \frac{2}{5}}{\log_5 \frac{1}{5}} = \frac{\log_5 2 - 1}{-1} = 1 - \log_5 2$$

となるから、解は

$$-1 < x < 1 - \log_5 2$$

と表すこともできる。

- (3) 真数条件より $2x+3 > 0$ かつ $x^2+1 > 0$ である。これより $-\frac{3}{2} < x$ が必要条件である。このもとで与式を変形する。

$$\begin{aligned} (\text{与式}) \quad &\iff \frac{\log_3(2x+3)}{\log_3 \sqrt{3}} > \log_3 \{3(x^2+1)\} \\ &\iff 2\log_3(2x+3) > \log_3(3x^2+3) \\ &\iff \log_3(2x+3)^2 > \log_3(3x^2+3) \end{aligned}$$

対数の底は1より大きいから、真数の大小と対数全体の大小は一致し、

$$(2x+3)^2 > (3x^2+3)$$

を解いて

$$x < -6 - \sqrt{30} \quad \text{または} \quad -6 + \sqrt{30} < x$$

を得る。これと真数条件から得られた $-\frac{3}{2} < x$ の積集合を考え、

$$-6 + \sqrt{30} < x$$

が解となる。

- (4) 対数の底の条件より

$$x+2 > 0, \quad x+2 \neq 1, \quad (x+2)^2 > 0, \quad (x+2)^2 \neq 1$$

である。これを整理すると

$$-2 < x < -1 \quad \text{または} \quad -1 < x$$

となる。また、真数条件より、

$$|x+1| > 0, \quad 3-x > 0$$

である。これを整理すると、

$$x \neq -1, \quad x < 3$$

となる。よって、底の条件と真数条件を合わせた

$$-2 < x < -1 \quad \text{または} \quad -1 < x < 3$$

は元の不等式の必要条件となる。このもとで与式を考える。

ところで、底の変換公式より

$$\log_a b = \frac{\log_a b}{\log_a a} = \frac{2\log_a b}{2\log_a a} = \frac{\log_a b^2}{\log_a a^2} = \log_{a^2} b^2$$

が得られる。これは対数の底と真数を2乗しても元の対数と値が等しいことを表す。これを用いて、与式を底を $(x+2)^2$ とする対数の不等式として表すと、

$$(\text{与式}) \quad \iff \log_{(x+2)^2}(x+1)^2 > \log_{(x+2)^2}(3-x) \quad (5.1)$$

である。

- (i) $-2 < x < -1$ のとき、 $(x+2)^2 < 1$ であり、底 $(x+2)^2$ は1より小さいから、真数の大小と対数の大小は反転する。よってこの範囲のもとで

$$(5.1) \quad \iff (x+1)^2 < 3-x$$

$$\begin{aligned} &\iff x^2 + 3x - 2 < 0 \\ &\iff \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

である。ゆえに $-2 < x < -1$ である。

- (ii) $-1 < x < 3$ のとき, $(x+2)^2 > 1$ であり, 底 $(x+2)^2$ は 1 より大きいから, 真数の大小と対数の大小は一致する。よってこの範囲のもとで

$$\begin{aligned} (5.1) \quad &\iff (x+1)^2 > 3-x \\ &\iff x^2 + 3x - 2 > 0 \\ &\iff x < \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{または} \quad x > \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

である。ゆえに $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < x < 3$ である。

- (i), (ii) より, 解は

$$-2 < x < -1 \quad \text{または} \quad \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < x < 3$$

である。

5.3 解説

指数関数・対数関数を含む不等式です。方程式と同じく $a^x = t$ の置き換えや底そろえを行います。が、不等式では次の点に最大の注意を払います。

- 指数関数 a^x や対数関数 $\log_a x$ は, 底 a が 1 より大きい小さいかで増減が変わる。底が 1 より大きければ大小はそのまま, 1 より小さければ大小が反転する。
- 対数の不等式では, 先に底の条件・真数条件を求めておく。

「不等号の向きが底によって変わる」ことを意識しないと, 符号を取り違えます。

- $4^x = 2^{2x}$ として $t = 2^x$ ($t > 0$) とおくと $t^2 - 4t - 32 \geq 0$, すなわち $(t+4)(t-8) \geq 0$ になります。 $t+4 > 0$ で割ると $t \geq 8 = 2^3$ となり, 底 2 は 1 より大きいので $x \geq 3$ です。
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ と直し, $t = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ($t > 0$) とおくと $5t^2 - 27t + 10 < 0$, すなわち $\frac{2}{5} < t < 5$ を得ます。ここで底 $\frac{1}{5}$ は 1 より小さいので, $t = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ を x に戻すと大小が反転し, $-1 < x < 1 - \log_5 2$ となります。底が 1 未満のときの反転がこの問題の山場です。
- 真数条件 $2x+3 > 0$ を押さえ, 底を 3 にそろえます。 $\log_{\sqrt{3}}(2x+3) = 2\log_3(2x+3)$, 右辺の $+1$ は $\log_3 3$ として $\log_3\{3(x^2+1)\}$ にまとめると, $\log_3(2x+3)^2 > \log_3(3x^2+3)$ になります。底 3 は 1 より大きいので真数の大小はそのまま, $(2x+3)^2 > 3x^2+3$ を解き, 真数条件と合わせます。
- この小問は場合分けが必要でやや重いです。まず底の条件・真数条件をすべて書き出すと, $-2 < x < -1$ または $-1 < x < 3$ が必要条件と分かります。次に, 底と真数を 2 乗しても対数の値が変わらないこと ($\log_{a^2} b^2 = \log_a b$) を使って, 両辺の底を $(x+2)^2$ にそろえます。ここで底 $(x+2)^2$ が 1 より大きい小さいかは x の範囲で変わるので, $-2 < x < -1$ (底

< 1 , 反転) と $-1 < x < 3$ (底 > 1 , そのまま) に分けて, それぞれ2次不等式を解きます。

5.4 採点

【第5問 16点】

(1) 4点

- 因数分解ができたか。
- 常に正である部分を除外し, 解を導けたか。

(2) 4点

- 因数分解ができたか。
- x の範囲で表すことができたか。

(3) 4点

- 真数条件を確認できたか。
- 真数の大小に帰着できたか。

(4) 4点

- 底の条件と真数条件を確認できたか。
- 底と1の大小を比較し, 適切に場合分けできたか。

6 第6問：対数と数字の桁

6.1 問題

通常使われている数の表記法は、各桁を 0 から 9 までの 10 個の数字を用いて表す 10 進法であり、この記法で表された数を 10 進数という。10 進数で n 桁の自然数 N は、0 以上 9 以下の整数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ および 1 以上 9 以下の整数 a_{n-1} を用いて

$$N = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

と表され、不等式 $10^{n-1} \leq N < 10^n$ を満たす。特に、最高位の数字が a と分かっている場合、 N は不等式 $a \cdot 10^{n-1} \leq N < (a+1) \cdot 10^{n-1}$ を満たす。

また、1 より小さい正の数 K について、小数第 1 位から順に見ていき、小数第 k 位に初めて 0 でない数が現れるとき、1 以上 9 以下の整数 k_0 と 0 以上 9 以下の整数 $k_1, k_2, \dots$ を用いて

$$K = k_0 \cdot 10^{-k} + k_1 \cdot 10^{-(k+1)} + k_2 \cdot 10^{-(k+2)} + \dots$$

と表され、不等式 $10^{-k} \leq K < 10^{-(k+1)}$ を満たす。

7 進法とは、7 種類の記号、特に 0 から 6 までの 7 個の数字を用いて数を表す方法であり、この記法で表された数を 7 進数という。7 進数で m 桁の自然数 M は、10 進法では 0 以上 6 以下の整数 $b_0, b_1, \dots, b_{m-2}$ および 1 以上 6 以下の整数 b_{m-1} を用いて

$$M = b_{m-1} \cdot 7^{m-1} + b_{m-2} \cdot 7^{m-2} + \dots + b_1 \cdot 7^1 + b_0 \cdot 7^0$$

と表され、不等式 $7^{m-1} \leq M < 7^m$ を満たす。特に、最高位の数字が b と分かっている場合、 M は不等式 $b \cdot 7^{m-1} \leq M < (b+1) \cdot 7^{m-1}$ を満たす。

以下の問いに答えよ。ただし、特に断りなく書かれる数は 10 進法で表記されているものとする。また、対数の値については、次の表に示される不等式を利用してよい。

表 6.1: 対数の値が満たす不等式

$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$	$0.3562 < \log_7 2 < 0.3563$
$0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$	$0.5645 < \log_7 3 < 0.5646$
$0.845 < \log_{10} 7 < 0.8451$	$0.827 < \log_7 5 < 0.8271$

- (1) 6^{50} は何桁の整数であるか答えよ。また、最高位の数字を求めよ。
- (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{30}$ を小数第 1 位から順に見ていくとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか答えよ。
- (3) 8^{20} を 7 進法で表すと何桁の整数になるか答えよ。また、最高位の数字を求めよ。
- (4) 表 6.1 に示されているのは 6 つの対数のみであるが、計算によって底および真数が 2 以上 10 以下の整数である対数の値は不等式で表すことができる。 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$, $\log_7 5 = c$ とおくとき、 $\log_5 3$ と $\log_7 6$ を $\log$ を用いない a, b, c の式で表せ。

6.2 解答

- (1)
- 6^{50}
- の常用対数を考える。

$$\log_{10} 6^{50} = 50 \log_{10} 6 = 50 \log_{10} (2 \cdot 3) = 50 \cdot (\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$$

表を用い、この式が満たす不等式を考える。

$$50 \cdot (0.301 + 0.4771) < 50 \cdot (\log_{10} 2 + \log_{10} 3) < 50 \cdot (0.3011 + 0.4772)$$

各辺を計算し、 $50 \cdot (\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$ を $\log_{10} 6^{50}$ に表記し直すと

$$38.905 < \log_{10} 6^{50} < 38.915 \quad (6.1)$$

となる。

ところで、8 と 9 の常用対数を考える。

$$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2 \log_{10} 3$$

より

$$\log_{10} 8 < 3 \cdot 0.3011$$

$$\log_{10} 9 > 2 \cdot 0.4771$$

であり、右辺をそれぞれ計算して

$$\log_{10} 8 < 0.9033$$

$$\log_{10} 9 > 0.9542$$

である。(6.1)にこれを付け足すと

$$38 + \log_{10} 8 < 38.905 < \log_{10} 6^{50} < 38.915 < 38 + \log_{10} 9$$

となり、この不等式の左から 1, 3, 5 個目に着目して、常用対数の不等式

$$38 + \log_{10} 8 < \log_{10} 6^{50} < 38 + \log_{10} 9$$

を得る。これを式変形すると、

$$\log_{10} (8 \cdot 10^{38}) < \log_{10} 6^{50} < \log_{10} (9 \cdot 10^{38})$$

とでき、常用対数の真数を比較して

$$8 \cdot 10^{38} < 6^{50} < 9 \cdot 10^{38}$$

が得られるから、 6^{50} は 39 桁の自然数で、最高位の数字は 8 である。

- (2)
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{30}$
- の常用対数を考える。

$$\log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{30} = \log_{10} 5^{-30} = -30 \log_{10} 5 = -30 \log_{10} \frac{10}{2} = -30 \cdot (1 - \log_{10} 2)$$

表を用い、この式が満たす不等式を考える。

$$-30 \cdot (1 - 0.301) < -30 \cdot (1 - \log_{10} 2) < -30 \cdot (1 - 0.3011)$$

各辺を計算し、 $-30 \cdot (1 - \log_{10} 2)$ を $\log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{30}$ に表記し直すと

$$-20.97 < \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{30} < -20.967$$

となる。よって

$$-21 < \log_{10} \left(\frac{1}{5} \right)^{30} < -20$$

すなわち

$$\log_{10} 10^{-21} < \log_{10} \left(\frac{1}{5} \right)^{30} < \log_{10} 10^{-20}$$

となり、真数を比較して

$$10^{-21} < \left(\frac{1}{5} \right)^{30} < 10^{-20}$$

が成り立つから、 $\left(\frac{1}{5} \right)^{30}$ を小数第1位から順に見ていくとき、小数第21位に初めて0でない数字が現れる。

- (3) 8^{20} の、底を7とする対数を考える。

$$\log_7 8^{20} = \log_7 2^{60} = 60 \log_7 2$$

表を用い、この式が満たす不等式を考える。

$$60 \cdot 0.3562 < 60 \cdot \log_7 2 < 60 \cdot 0.3563$$

各辺を計算し、 $60 \log_7 2$ を $\log_7 8^{20}$ に表記し直すと

$$21.372 < \log_7 8^{20} < 21.378$$

となる。

$$\log_7 2 < 0.3563, \quad \log_7 3 > 0.5645$$

より、

$$21 + \log_7 2 < 21.372 < \log_7 8^{20} < 21.378 < 21 + \log_7 3$$

となり、この不等式の左から1, 3, 5個目に着目して、不等式

$$21 + \log_7 2 < \log_7 8^{20} < 21 + \log_7 3$$

を得る。これを式変形すると

$$\log_7 (2 \cdot 7^{21}) < \log_7 8^{20} < \log_7 (3 \cdot 7^{21})$$

とでき、真数を比較して

$$2 \cdot 7^{21} < 8^{20} < 3 \cdot 7^{21}$$

が得られるから、 8^{20} は7進法において22桁の自然数で、最高位の数字は2である。

- (4) 底の変換公式を使えば、

$$(\log_A B)(\log_B C) = (\log_A B) \cdot \frac{\log_A C}{\log_A B} = \log_A C$$

であることが分かる。これと

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2$$

を用いると、与式は a , b , c を用いて次の1式目、4式目のように表される。

$$\log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{b}{1-a}$$

$$\log_5 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5} = \frac{a}{1-a}$$

$$\log_5 6 = \log_5 2 + \log_5 3 = \frac{a+b}{1-a}$$

$$\log_7 6 = (\log_7 5)(\log_5 6) = \frac{c(a+b)}{1-a}$$

6.3 解説

n 桁で最高位の数字が a である整数 N は不等式

$$a \cdot 10^{n-1} \leq N < (a+1) \cdot 10^{n-1}$$

を満たします。これに底 10 の対数をとると

$$n-1 + \log_{10} a \leq \log_{10} N < n-1 + \log_{10} (a+1)$$

となり、大きな数の大きさが分かりやすくなるのです。7 進数になっても考え方は同じで、 n 桁で最高位の数字が a である整数 M は

$$a \cdot 7^{n-1} \leq M < (a+1) \cdot 7^{n-1}$$

、底 7 の対数をとって

$$n-1 + \log_7 a \leq \log_7 M < n-1 + \log_7 (a+1)$$

と評価できます。

6.4 採点

【第 6 問 18 点】

- (1) 5 点
- (2) 4 点
- (3) 5 点
- (4) 4 点