

確 認 試 験 問 題

三 角 関 数

(配点 100 点)

(日付) 年 月 日

(開始)

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 ~ (90 分) ~

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 (終了)

注 意 事 項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 7 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 6 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 6 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 21)

α, β を一般角とする。図 1.1 のように、原点 O を中心とする単位円上に $X(1, 0)$ をとり、点 O を中心に点 X を α 回転させた点を P 、さらに β 回転させた点を Q とする。また、図 1.2 の 3 点 Y, R, S は、点 X, P, Q を、それぞれ点 O を中心に $-\alpha$ 回転させた点である。

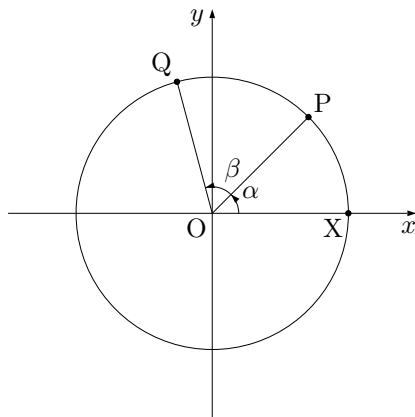


図 1.1

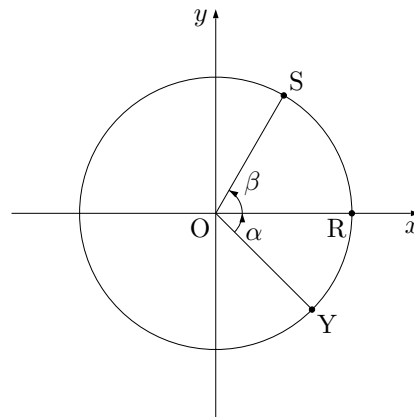


図 1.2

- (1) $P(a, b)$ とする。 $\sin \alpha, \cos \alpha$ を a, b のうち必要なものを用いて表せ。また、 $a \neq 0$ のとき、 $\tan \alpha$ を a, b で表せ。
- (2) 加法定理と呼ばれる次の等式を示せ。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

必要であれば、 $XQ = YS$ を用いると良い。

- (3) $\cos \frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。
- (4) θ を一般角とする。2 倍角の公式と呼ばれる次の等式を示せ。

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

- (5) $\sin \frac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

第 2 問

(配点 20)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 半径 r , 中心角 θ の扇形の弧の長さは $r\theta$, 面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$ で与えられることを説明し, 半径 5, 中心角 $\frac{3}{7}\pi$ の扇形の弧の長さ と面積を求めよ。

- (2) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の範囲にある実数 θ が $\sin \theta = \frac{3}{7}$ を満たしているとき, 次の 2 つの式の値を求めよ。

$$\sin 2\theta, \quad \tan 2\theta$$

- (3) θ を第 4 象限の角とする。 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$ が成り立つとき, 次の 2 つの式の値を求めよ。

$$\sin^3 \theta - \cos^3 \theta, \quad \sin \theta$$

- (4) 座標平面上に, 直線 $l: y = \sqrt{3}x$ がある。この直線と $\frac{\pi}{4}$ の角を成す直線の傾きとして存在しうるものをすべて求めよ。

第 3 問

(配点 20)

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。以下の方程式および不等式 (1)～(5) をそれぞれ解け。

(1) $\tan \theta \leq 1$

(2) $2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \geq -\sqrt{3}$

(3) $\sin 2\theta = \sin \theta$

(4) $\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$

(5) $\cos 5\theta + \cos \theta = 0$

第 4 問

(配点 13)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1) $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$ の値を求めよ。

(2) 鋭角三角形 ABC の 3 つの内角を A , B , C とする。次の等式を示せ。

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

(3) 三角形 ABC の 3 つの内角を A , B , C とする。次の不等式を示せ。

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

第 5 問

(配点 12)

- (1) 定義域を $0 \leq \theta \leq \pi$ とし、関数 $f(\theta)$ を次のように定める。

$$f(\theta) = \sin \theta + \cos \theta$$

このとき、 $f(\theta)$ の値域を求めよ。

- (2) 定義域を $0 \leq \theta \leq \pi$ とし、関数 $g(\theta)$ を次のように定める。

$$g(\theta) = 3 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos \theta - 2 \sin \theta + 1$$

このとき、 $g(\theta)$ の値域を求めよ。

第 6 問

(配点 14)

関数 f について、任意の x の値に対して次の等式が成り立つとき、関数 f は周期 T を持つという。ただし、 T は 0 でない定数とする。

$$f(x+T) = f(x)$$

また、このような関数を周期関数という。この性質を満たす定数 T のうち、最小の正の数が存在するとき、それを基本周期と呼ぶ。

周期関数の例として、正弦関数 $f(x) = \sin x$ が挙げられる。任意の実数 x に対し、

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

が成り立つことから、この関数は周期 2π を持つことがわかる。また、この関数において 2π は基本周期でもある。別の例として、実数の小数部分を表す関数

$$f(x) = x - [x]$$

がある。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

周期関数は、一定の間隔でとる値が繰り返されるものである。以下に関数 $y = \sin x$ と $y = x - [x]$ のグラフをそれぞれ示した。

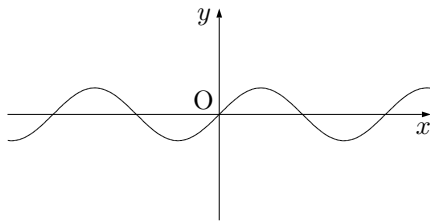


図 5.1: $y = \sin x$

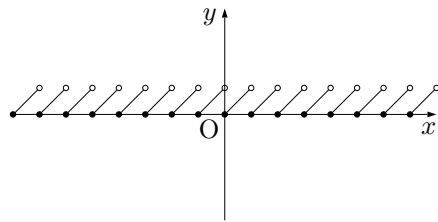


図 5.2: $y = x - [x]$

- (1) ある関数が周期 P を持つとき、その関数は周期 $2P$ を持つことを、計算によって示せ。
- (2) 関数 $f(x) = \sin \frac{3}{7}x$ は周期関数であるが、その基本周期を求めよ。
- (3) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \sin \left(\frac{2}{3}x + \frac{11}{4}\pi \right) + \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{9}\pi \right)$$

このとき、 $g(x)$ は周期関数であるが、その周期を 1 つ挙げよ。

- (4) 整数 z について、周期 z を持つ関数を、 z の値と共に 1 つ挙げよ。