
確 認 試 験 問 題

三 角 関 数

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：三角比の公式

1.1 問題

α, β を一般角とする。図 1.1 のように、原点 O を中心とする単位円上に $X(1, 0)$ をとり、点 O を中心に点 X を α 回転させた点を P 、さらに β 回転させた点を Q とする。また、図 1.2 の3点 Y, R, S は、点 X, P, Q を、それぞれ点 O を中心に $-\alpha$ 回転させた点である。

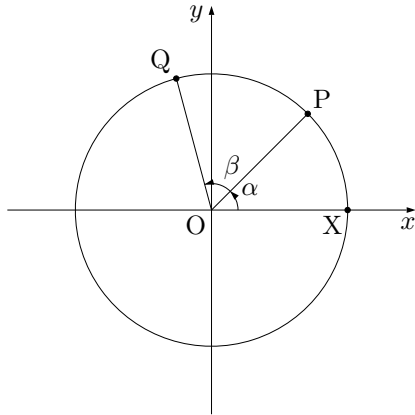


図 1.1

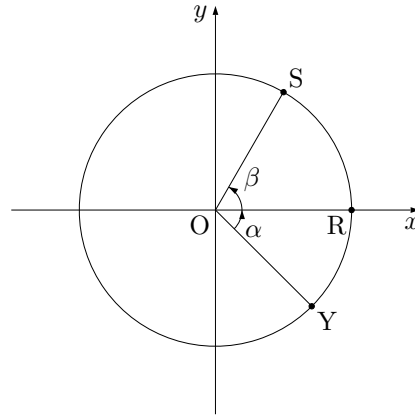


図 1.2

- (1) $P(a, b)$ とする。 $\sin \alpha, \cos \alpha$ を a, b のうち必要なものを用いて表せ。また、 $a \neq 0$ のとき、 $\tan \alpha$ を a, b で表せ。

- (2) 加法定理と呼ばれる次の等式を示せ。

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

必要であれば、 $XQ = YS$ を用いると良い。

- (3) $\cos \frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

- (4) θ を一般角とする。2 倍角の公式と呼ばれる次の等式を示せ。

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

- (5) $\sin \frac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

1.2 解答

- (1)

$$\sin \alpha = b, \quad \cos \alpha = a, \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

- (2) 各点の座標は

$$X(1, 0), \quad Q(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)),$$

$$Y(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)), \quad S(\cos \beta, \sin \beta)$$

と表される。また、三角比の性質より、

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

である。XQ = YS より、両辺を2乗した $XQ^2 = YS^2$ を計算し、

$$\{\cos(\alpha + \beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha + \beta) - 0\}^2 = \{\cos \alpha - \cos \beta\}^2 + \{-\sin \alpha - \sin \beta\}^2$$

が成り立つ。一般角 θ について $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であることを用いると、

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

これを整理して、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

を得る。

(3) (2) より、

$$\begin{aligned} \cos \frac{5}{12}\pi &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(4) (2) において $\alpha = \beta = \theta$ とおくと、

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

であり、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ だから、

$$\cos 2\theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta$$

$$\therefore \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

であり、題意は示された。

(5) (4) において、 $\theta = \frac{\pi}{8}$ とすると、

$$\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore 2\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ だから、

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

と求められる。

1.3 解説

(1) 三角比の定義に直結する問題です。 $\tan \alpha$ は $a = 0$ のとき定義されませんが、問題文で $a \neq 0$ という条件が与えられています。

- (2) 問題文中のヒントを用い，線分の長さを 2 通りで表現すれば，示すべき加法定理が得られます。
(3)(4)(5) 前の設問 (2) で得られた加法定理を駆使することで計算できます。

1.4 採点

【第 1 問 21 点】

(2)～(5) は，計算過程に応じて部分点を与える。

(1) 3 点

- 3 つの式に各 1 点。

(2) 6 点

(3) 4 点

(4) 4 点

(5) 4 点

2 第2問：三角比と計算

2.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 半径 r , 中心角 θ の扇形の弧の長さは $r\theta$, 面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$ で与えられることを説明し, 半径 5, 中心角 $\frac{3}{7}\pi$ の扇形の弧の長さ と面積を求めよ。

- (2) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の範囲にある実数 θ が $\sin \theta = \frac{3}{7}$ を満たしているとき, 次の 2 つの式の値を求めよ。

$$\sin 2\theta, \quad \tan 2\theta$$

- (3) θ を第 4 象限の角とする。 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$ が成り立つとき, 次の 2 つの式の値を求めよ。

$$\sin^3 \theta - \cos^3 \theta, \quad \sin \theta$$

- (4) 座標平面上に, 直線 $l: y = \sqrt{3}x$ がある。この直線と $\frac{\pi}{4}$ の角を成す直線の傾きとして存在するものをすべて求めよ。

2.2 解答

- (1) 半径 r の円の周長は $2\pi r$, 面積は πr^2 である。円は, 中心角 2π の扇形とみなせるので, 中心角 θ の扇形の弧の長さ と面積は, 半径が等しい円のそれらの $\frac{\theta}{2\pi}$ 倍である。従って, 半径 r , 中心角 θ の扇形の弧の長さ と面積はそれぞれ

$$2\pi r \cdot \frac{\theta}{2\pi} = r\theta, \quad \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

である。また, 半径 5, 中心角 $\frac{3}{7}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S はそれぞれ,

$$l = 5 \cdot \frac{3}{7}\pi = \frac{15}{7}\pi, \quad S = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \frac{3}{7}\pi = \frac{75}{14}\pi$$

である。

- (2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より,

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より, $\cos \theta < 0$ だから,

$$\cos \theta = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

である。また,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{7}}{-\frac{2\sqrt{10}}{7}} = -\frac{3}{2\sqrt{10}}$$

である。これらを用いて求めるべき式の値を計算すると次のようになる。

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{10}}{7} \right) = -\frac{12\sqrt{10}}{49}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{2\sqrt{10}} \right)}{1 - \left(-\frac{3}{2\sqrt{10}} \right)^2} = -\frac{12\sqrt{10}}{31}$$

(3) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$ の両辺を2乗して,

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{9}{25}$$

となるが, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて整理すると

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{25} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{25}$$

となる。また,

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{8}{25} \right) = \frac{41}{25}$$

であり, θ は第4象限の角度であることから $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$ より

$$\sin \theta - \cos \theta < 0$$

であることを考慮して

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{41}}{5}$$

が得られる。これらを用いて与式の値を計算すると次の通りである。

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{41}}{5} \right) \cdot \left(1 - \frac{8}{25} \right) \\ &= -\frac{17\sqrt{41}}{125} \\ \sin \theta &= \frac{1}{2} \{ (\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) \} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{41}}{5} \right) \\ &= \frac{3 - \sqrt{41}}{10} \end{aligned}$$

(4) l と x 軸の成す角のうち小さい方を α とすると, $\tan \alpha = \sqrt{3}$ であるから,

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

である。 l と $\frac{\pi}{4}$ の角を成す直線の, x 軸からの角度は, $\alpha + \frac{\pi}{4}$, $\alpha - \frac{\pi}{4}$ で表されるから, それぞれの傾きとして正接を計算すると,

$$\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = -2 - \sqrt{3},$$

$$\tan \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = 2 - \sqrt{3}$$

である。

2.3 解説

(1) 度数法を基準にして考えると、次のように説明できます。

(別解) 半径 r , 中心角 a° の扇形の弧の長さは $2\pi r \cdot \frac{a}{360}$, 面積は $\pi r^2 \cdot \frac{a}{360}$ である。 $a^\circ = \theta[\text{rad}]$ とすると, $360^\circ = 2\pi[\text{rad}]$ より, 半径 r , 中心角 θ の扇形の弧の長さ と面積はそれぞれ

$$2\pi r \cdot \frac{\theta}{2\pi} = r\theta, \quad \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

である。

(2) 基本的な計算問題ですが, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ では $\cos \theta < 0$ であることに注意しましょう。

(3) 基本的な計算問題ですが, θ が第4象限の角であるため, $\sin \theta < 0$ であることに注意しましょう。

(4) l と $\frac{\pi}{4}$ の角を成す直線は, l と x 軸が成す角である $\frac{\pi}{3}$ から, 角が $\frac{\pi}{4}$ 増加したものと減少したものの2つあることに注意します。視覚的理解として, 図 2.1 と図 2.2 を参照。

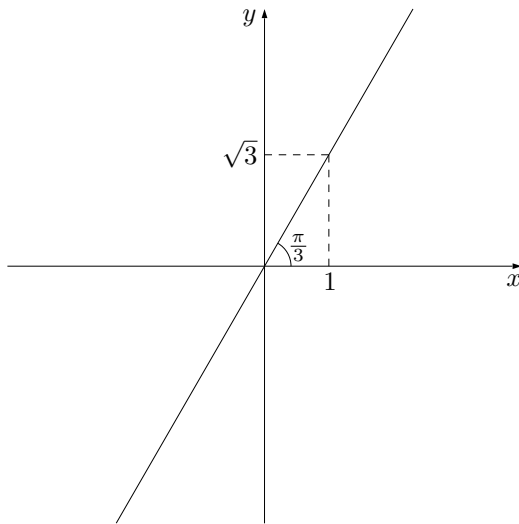


図 2.1: (4)

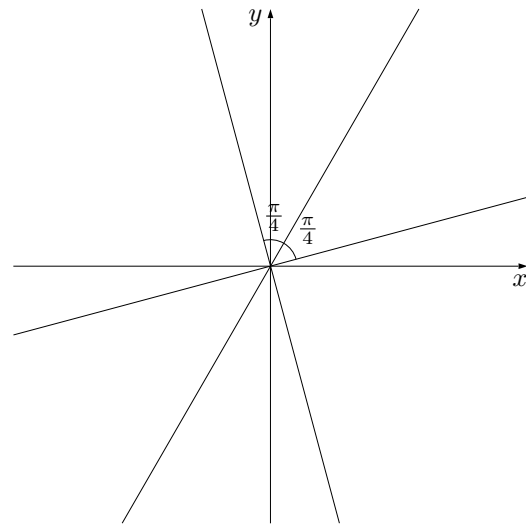


図 2.2: (4)

2.4 採点

【第2問 20点】

計算結果に有理化は問わない。

(1) 5点

- 説明に3点。長さ と面積にそれぞれ1点。

(2) 5点

- 計算過程に3点。答えにそれぞれ1点。

(3) 5点

- 計算過程に3点。答えにそれぞれ1点。

(4) 5点

- 計算過程に3点。答えにそれぞれ1点。

3 第3問：三角関数の方程式・不等式

3.1 問題

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。以下の方程式および不等式 (1)～(5) をそれぞれ解け。

(1) $\tan \theta \leq 1$

(2) $2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \geq -\sqrt{3}$

(3) $\sin 2\theta = \sin \theta$

(4) $\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$

(5) $\cos 5\theta + \cos \theta = 0$

3.2 解答

- (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ において、 $\tan \theta = 1$ を満たす θ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\theta = \frac{5}{4}\pi$ である。 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ の範囲において $\tan \theta < 0$ であることを考慮して、不等式の解は

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{または} \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{5}{4}\pi \quad \text{または} \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

である。

- (2) $\theta - \frac{\pi}{4} = t$ とおいて与式を整理すると、

$$\cos t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。また、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$0 - \frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} < 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$$

である。この t の範囲で $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる t は $t = \frac{5}{6}\pi$ と $t = \frac{7}{6}\pi$ であるから、与えられた不等式を t について解くと

$$-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad \frac{7}{6}\pi \leq t < \frac{7}{4}\pi$$

である。 $\theta = t + \frac{\pi}{4}$ より、各辺に $\frac{\pi}{4}$ を足して、

$$0 \leq \theta \leq \frac{13}{12}\pi \quad \text{または} \quad \frac{17}{12}\pi \leq \theta < 2\pi$$

が解となる。

- (3) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ を用いて与式を整理すると、

$$\sin \theta (2 \cos \theta - 1) = 0$$

となる。よって方程式は

$$\sin \theta = 0 \quad \text{または} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

と変形でき、それぞれを θ について解くと、最終的な解は

$$\theta = 0 \quad \text{または} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{または} \quad \theta = \pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{5}{3}\pi$$

となる。

- (4) $\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta = 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ より、与式を整理すると、

$$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

である。 $2\theta + \frac{\pi}{6} = t$ とおくと、

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

となり、 t の範囲を計算すると

$$2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} < 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{25}{6}\pi$$

である。この範囲で $\sin t = \frac{1}{2}$ を t について解くと、

$$t = \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad t = \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad t = \frac{13}{6}\pi \quad \text{または} \quad t = \frac{17}{6}\pi$$

である。 $\theta = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{12}$ より、求めるべき解は次で与えられる。

$$\theta = 0 \quad \text{または} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{または} \quad \theta = \pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{4}{3}\pi$$

- (5) 方程式の左辺は

$$\cos 5\theta + \cos \theta = 2 \cos \frac{5\theta + \theta}{2} \cos \frac{5\theta - \theta}{2} = 2 \cos 3\theta \cos 2\theta$$

と変形できる。よって元の方程式は

$$2 \cos 3\theta \cos 2\theta = 0$$

$$\therefore \cos 3\theta = 0 \quad \text{または} \quad \cos 2\theta = 0$$

となり、これを解くと次の通りである。

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{または} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{または} \quad \theta = \frac{3}{4}\pi \quad \text{または}$$

$$\theta = \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{7}{6}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{5}{4}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi \quad \text{または}$$

$$\theta = \frac{7}{4}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{11}{6}\pi$$

3.3 解説

三角比の方程式や不等式を解く場合、式を整理するために、次のようなことを考えましょう。

- 角や三角比を統一する
- 三角比を一つにまとめる（合成）
- 積の形にする（因数分解、和積の公式）

角を置き換えるとき、置き換えた変数の範囲を反映することを忘れないようにしましょう。

(1)(2) 三角比一つだけの方程式、不等式のため、そのまま答えを求める段階になります。角を $= t$ などと置くとわかりやすくなります。

(3)(4)(5) それぞれ、因数分解、合成、和積によって積の形や一つの三角比に変形できます。

3.4 採点

【第3問 20点】

計算過程に応じて部分点を与える。

- (1) 4点
- (2) 4点
- (3) 4点
- (4) 4点
- (5) 4点

4 第4問：加法定理と積和の公式

4.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$ の値を求めよ。
- (2) 鋭角三角形 ABC の3つの内角を A, B, C とする。次の等式を示せ。

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$
- (3) 三角形 ABC の3つの内角を A, B, C とする。次の不等式を示せ。

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

4.2 解答

(1)

$$\begin{aligned}
 & \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \left(\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \right) \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{9} \right) \right\} \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{9} \right) \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi}{9} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi}{9} + \frac{1}{4} \left\{ \cos \left(\frac{4\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{9} - \frac{\pi}{9} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi}{9} + \frac{1}{4} \cos \frac{5\pi}{9} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi}{9} + \frac{1}{4} \cos \left(\pi - \frac{4\pi}{9} \right) + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi}{9} - \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi}{9} + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

- (2) $A + B + C = \pi$ であることから $C = \pi - (A + B)$ が得られる。これより

$$\begin{aligned}
 \tan C &= \tan \{ \pi - (A + B) \} \\
 &= -\tan(A + B) \\
 &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}
 \end{aligned}$$

と計算できるから、

$$\begin{aligned}
 \tan C(1 - \tan A \tan B) &= -(\tan A + \tan B) \\
 \therefore \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C
 \end{aligned}$$

が得られる。

(3) $A + B + C = \pi$ である。これを用いて左辺を計算すると、

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \sin 2A + \sin 2B + 2 \sin C \cos C \\
 &= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\
 &= 2 \{ \sin(\pi - C) \cos(A - B) + \sin C \cos(\pi - (A + B)) \} \\
 &= 2 \sin C \{ \cos(A - B) - \cos(A + B) \} \\
 &= 2 \sin C \cdot (-2) \sin \frac{(A - B) + (A + B)}{2} \sin \frac{(A - B) - (A + B)}{2} \\
 &= 2 \sin C \cdot (-2) \sin A \cdot \sin(-B) \\
 &= 4 \sin A \sin B \sin C \\
 &= (\text{右辺})
 \end{aligned}$$

となり、右辺と等しくなる。

4.3 解説

(1) の別解として、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ を用い、

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} &= \left(\sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \right) \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \right) \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{8} \sin \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) \\
 &= \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{9}
 \end{aligned}$$

から両辺を $\sin \frac{\pi}{9}$ で割って与式は $\frac{1}{8}$ とすることもできます。

4.4 採点

【第4問 13点】

5 第5問：三角関数の値域

5.1 問題

- (1) 定義域を $0 \leq \theta \leq \pi$ とし、関数 $f(\theta)$ を次のように定める。

$$f(\theta) = \sin \theta + \cos \theta$$

このとき、 $f(\theta)$ の値域を求めよ。

- (2) 定義域を $0 \leq \theta \leq \pi$ とし、関数 $g(\theta)$ を次のように定める。

$$g(\theta) = 3 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos \theta - 2 \sin \theta + 1$$

このとき、 $g(\theta)$ の値域を求めよ。

5.2 解答

- (1) $f(\theta)$ を変形すると、

$$f(\theta) = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

である。 $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ より、 $f(\theta)$ の値域は次のようになる。

$$-1 \leq f(\theta) \leq \sqrt{2}$$

- (2) (1) の $f(\theta)$ について、 $f(\theta) = y$ とおくと、 y の範囲は $-1 \leq y \leq \sqrt{2}$ であり、

$$y^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

より

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{y^2 - 1}{2}$$

を得る。よって $g(\theta)$ は

$$g(\theta) = \frac{3}{2}(y^2 - 1) - 2y + 1 = \frac{3}{2}y^2 - 2y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{7}{6}$$

と表される。これは $y = \frac{2}{3}$ で最小値 $-\frac{7}{6}$ をとり、最大値は定義域 $-1 \leq y \leq \sqrt{2}$ の端点で

とる。 $y = -1$ のとき 3 、 $y = \sqrt{2}$ のとき $\frac{5}{2} - 2\sqrt{2}$ であり、 $3 > \frac{5}{2} - 2\sqrt{2}$ だから最大値は $y = -1$ での 3 である。従って、 $g(\theta)$ の値域は

$$-\frac{7}{6} \leq g(\theta) \leq 3$$

である。

5.3 解説

- (1) 三角関数の合成を使います。正弦関数にする場合、

$$A \sin(\theta + \alpha) = A \sin \theta \cos \alpha + A \cos \theta \sin \alpha$$

が $\sin \theta + \cos \theta$ になるような A, α は, $A \cos \alpha = 1, A \sin \alpha = 1$ を満たせばよく, それぞれを平方して和をとると

$$(A \cos \alpha)^2 + (A \sin \alpha)^2 = 2$$

より $A = \sqrt{2}$, そして $\alpha = \frac{\pi}{4}$ を一例として選ぶことができます。 $A = -\sqrt{2}$ としても良いですが, α もそれに伴って変わります。計算しやすい方を選ぶと良いでしょう。

一般に

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha), \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

と合成できます。また, 余弦関数に合成することもできます。

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta + \alpha), \quad \sin \alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$A \sin(\theta + \alpha)$ の形に直したら, 正弦関数なので, 単位円を書いて y 座標の範囲を求めれば良いです。その場合, 係数 A を忘れないようにしましょう。

図 5.1 より, 単位円の $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$ における y 座標の範囲は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 1$$

であるので, これが $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の範囲となります。あとは係数の $\sqrt{2}$ を加味して

$$\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq f(\theta) \leq \sqrt{2} \cdot 1$$

が得られます。

(2) $\sin \theta \cos \theta$ をどう表すのが要点です。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であることから, $\sin \theta + \cos \theta = y$ の両辺を 2 乗することが効果的です。これは様々な場面で役に立ち, 第 2 問 (3) でも使われています。

あとは 2 次関数の値域を求めれば解答に至ります。図 5.2 は, $y = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ のグラフで, $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の部分を太線にしています。

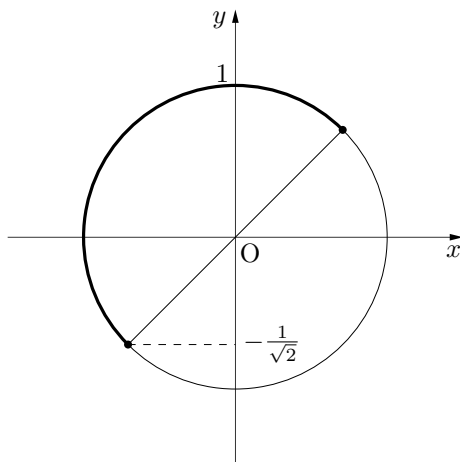


図 5.1: 単位円と $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$

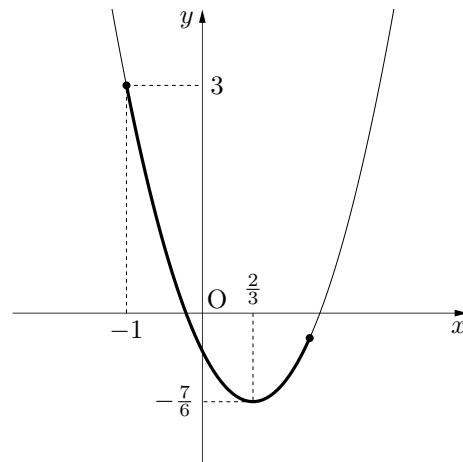


図 5.2: $y = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$

5.4 採点

【第 5 問 12 点】

必要に応じて，式変形，範囲の不等式などに部分点を与える。

- (1) 5 点
- (2) 7 点

6 第6問：周期関数

6.1 問題

関数 f について、任意の x の値に対して次の等式が成り立つとき、関数 f は周期 T を持つという。ただし、 T は 0 でない定数とする。

$$f(x+T) = f(x)$$

また、このような関数を周期関数という。この性質を満たす定数 T のうち、最小の正の数が存在するとき、それを基本周期と呼ぶ。

周期関数の例として、正弦関数 $f(x) = \sin x$ が挙げられる。任意の実数 x に対し、

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

が成り立つことから、この関数は周期 2π を持つことがわかる。また、この関数において 2π は基本周期でもある。別の例として、実数の小数部分を表す関数

$$f(x) = x - [x]$$

がある。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

周期関数は、一定の間隔でとる値が繰り返されるものである。以下に関数 $y = \sin x$ と $y = x - [x]$ のグラフをそれぞれ示した。

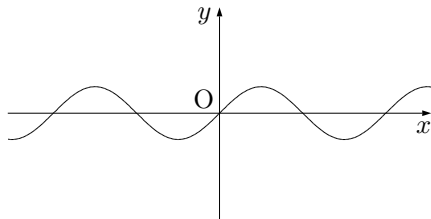


図 5.1: $y = \sin x$

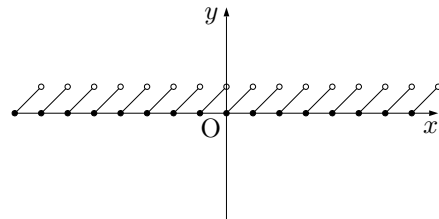


図 5.2: $y = x - [x]$

- (1) ある関数が周期 P を持つとき、その関数は周期 $2P$ を持つことを、計算によって示せ。
- (2) 関数 $f(x) = \sin \frac{3}{7}x$ は周期関数であるが、その基本周期を求めよ。
- (3) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{11}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{9}\pi\right)$$

このとき、 $g(x)$ は周期関数であるが、その周期を 1 つ挙げよ。

- (4) 整数 z について、周期 z を持つ関数を、 z の値と共に 1 つ挙げよ。

5.2 解答

- (1) 題意の関数を $f(x)$ とおく。 $f(x)$ が周期 P をもつとき、実数 X において $f(X+P) = f(X)$ が成り立つ。

$$f(x+2P) = f((x+P)+P)$$

$$\begin{aligned}
 &= f(x+P) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

より, $f(x+2P) = f(x)$ が得られるから, $f(x)$ が周期 $2P$ を持つことが示された。

(2)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin \frac{3}{7}x \\
 f(x+T) &= \sin \left(\frac{3}{7}x + \frac{3}{7}T \right)
 \end{aligned}$$

の2つが任意の実数 x について等しいとき, $\frac{3}{7}T = 2k\pi$ である。ただし, k は整数である。

このうち, T が正かつその中で最小となるものは, $k=1$, $T = \frac{14}{3}\pi$ のときである。従って, $f(x)$ の基本周期は $\frac{14}{3}\pi$ である。

(3)

$$\begin{aligned}
 g(x+12\pi) &= \sin \left(\frac{2}{3}(x+12\pi) + \frac{11}{4}\pi \right) + \cos \left(\frac{1}{2}(x+12\pi) + \frac{1}{9}\pi \right) \\
 &= \sin \left(\frac{2}{3}x + \frac{11}{4}\pi + 8\pi \right) + \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{9}\pi + 6\pi \right) \\
 &= \sin \left(\frac{2}{3}x + \frac{11}{4}\pi \right) + \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{9}\pi \right) \\
 &= g(x)
 \end{aligned}$$

より, $g(x)$ は周期 12π を持つ。

(4) 関数 $y = x - [x]$ は, 周期 $z=1$ の周期関数である。

5.3 解説

(1) $f(x+P) = f(x)$ を用いて, P を1つずつ消していくと $f(x+2P) = f(x)$ が得られます。

(2) $f(x+T) = f(x)$ が成り立つことから等式が得られます。 k が整数で $\sin(X+2k\pi) = \sin X$ であることを使います。基本周期を聞かれているため, T がその中でも最小の正の数であることで一意に決定します。

(3) $\sin$ や $\cos$ の関数内にある $\frac{11}{4}\pi$ や $\frac{1}{9}\pi$ は, それぞれ関数全体を x 軸方向に動かしているだけのため, 周期には影響がありません。

よって, $\sin \frac{2}{3}x + \cos \frac{1}{2}x$ の周期を考えればよいのですが, (2) と同じように考えていくと, $\sin \frac{2}{3}x$ の周期は

$$\dots, -3\pi, 3\pi, 6\pi, 9\pi, 12\pi, 15\pi, \dots$$

$\cos \frac{1}{2}x$ の周期は

$$\dots, -4\pi, 4\pi, 8\pi, 12\pi, 16\pi, \dots$$

のため, 共通する 12π が答えの一つなのではないかと推測できます。

あとは, $g(x+12\pi) = g(x)$ であることを計算で確かめれば良いです。なお, k を0でない整数として, $12k\pi$ で表される値であれば正解です。 $-12\pi, 24\pi, 48\pi$ など。

(4) 問題文に答えが書いてあります。実数の小数部分は値が1進むごとに繰り返されるので, 周期

は整数の1であることに気付けるかが重要です。

別解として、正の実数 a に対して $\sin ax$ の基本周期が $\frac{2\pi}{a}$ であることを用いれば、 $a = \pi$ とすれば、 $\sin \pi x$ が周期 $z = 2$ をもつことがわかります。

5.4 採点

【第6問 14点】

計算過程によっては、部分点を与える。

- (1) 3点
- (2) 4点
- (3) 4点
- (4) 3点