
確 認 試 験 問 題

図 形 と 方 程 式

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：座標平面上の図形

1.1 問題

座標平面上の図形について、以下の各問いに答えよ。

- (1) 2点 $(1, 1)$, $(2, 3)$ を $2:1$ に内分する点を A とし、2点 $(-2, -4)$, $(1, -5)$ を $5:3$ に外分する点を B とする。線分 AB の中点の座標を求めよ。
- (2) 直線 $2x + 3y + 1 = 0$ に関して、点 $(3, 2)$ と対称な点の座標を求めよ。
- (3) k を実数として、直線 $(2k + 1)x + (3k - 1)y + 8k + 7 = 0$ は、 k の値とは無関係にある定点 P を通る。 P の座標を求めよ。
- (4) 円 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ の点 $(5, 5)$ における接線の方程式を求めよ。
- (5) 3点 $(-13, 7)$, $(-11, 13)$, $(-9, -1)$ を通る円の中心と半径を求めよ。
- (6) 不等式 $(x^2 - 2x + y^2 - 3)(x + y + 1) < 0$ で表される領域を図示せよ。

1.2 解答

- (1) A の座標は

$$\left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{2 + 1}, \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{2 + 1} \right)$$

すなわち $A\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, B の座標は

$$\left(\frac{(-3) \cdot (-2) + 5 \cdot 1}{5 - 3}, \frac{(-3) \cdot (-4) + 5 \cdot (-5)}{5 - 3} \right)$$

すなわち $B\left(\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ だから、 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{11}{2} \right), \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{3} - \frac{13}{2} \right) \right)$$

すなわち $\left(\frac{43}{12}, -\frac{25}{12}\right)$ である。

- (2) 直線 $l: 2x + 3y + 1 = 0$ に関して、点 $A(3, 2)$ と対称な点を $B(a, b)$ とする。次のことが成り立つ。

- (i) $AB \perp l$ である。 AB の傾きは $\frac{b-2}{a-3}$, l の傾きは $-\frac{2}{3}$ であるから、それらの積が -1 となり、これを式で表すと

$$\frac{b-2}{a-3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

である。これを整理して、関係式

$$3a - 2b - 5 = 0 \tag{1.1}$$

を得る。

- (ii) AB の中点 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ は l 上にある。つまり座標を l の方程式に代入して

$$2 \cdot \frac{a+3}{2} + 3 \cdot \frac{b+2}{2} + 1 = 0$$

を満たす。これを整理して、関係式

$$2a + 3b + 14 = 0 \quad (1.2)$$

を得る。

- (1.1), (1.2) を解くと $a = -1$, $b = -4$ となるから、求めるべき B の座標は

$$(-1, -4)$$

である。

- (3) 与えられた直線の方程式を式変形し、

$$(x - y + 7) + k(2x + 3y + 8) = 0$$

とする。この式が k の値によらず常に成立するときの x , y の値は、

$$\begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ 2x + 3y + 8 = 0 \end{cases}$$

を解いて $x = -\frac{29}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ である。したがって、点 P の座標は $\left(-\frac{29}{5}, \frac{6}{5}\right)$ である。

- (4) 求めるべき接線の方程式は、

$$(x - 2)(5 - 2) + (y - 1)(5 - 1) = 25$$

すなわち

$$3x + 4y - 35 = 0$$

である。

- (5) 題の円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とする。これが与えられた 3 点を通る場合、その座標を代入して

$$\begin{cases} (-13)^2 + 7^2 - 13a + 7b + c = 0 \\ (-11)^2 + 13^2 - 11a + 13b + c = 0 \\ (-9)^2 + (-1)^2 - 9a - b + c = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$13a - 7b - c = 218 \quad (1.3)$$

$$11a - 13b - c = 290 \quad (1.4)$$

$$9a + b - c = 82 \quad (1.5)$$

が成り立つ。(1.3)−(1.4), (1.4)−(1.5)で c を消去し、

$$2a + 6b = -72$$

$$2a - 14b = 208$$

よりこれを解いて $a = 6$, $b = -14$ が得られ、(1.5)から $c = -42$ となる。したがって、円の方程式は

$$x^2 + y^2 + 6x - 14y - 42 = 0$$

である。これを式変形して

$$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 10^2$$

となるから、求めるべき円の中心は $(-3, 7)$ 、半径は 10 である。

(6) $x^2 - 2x + y^2 - 3 = A$, $x + y + 1 = B$ とおく。与式は

$$(A < 0 \text{ かつ } B > 0) \text{ または } (A > 0 \text{ かつ } B < 0)$$

と同値である。円 $A = 0$ を C 、直線 $B = 0$ を l とする。 C は、式変形した $(x-1)^2 + y^2 = 4$ より中心 $(1, 0)$ 、半径 2 の円である。また、 $A = 0$ と $B = 0$ を連立した

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

を解くと、

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

であり、 C と l はこの座標で共有点を持つ。答えは、図 1.1 の境界を含まない斜線部のような領域になる。

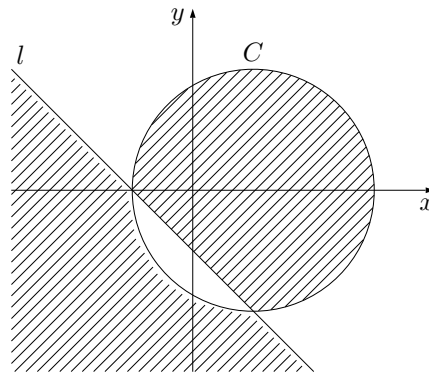


図 1.1: (6)

1.3 解説

座標平面上の基本事項を確認します。

- 2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を $m : n$ に内分する点は $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$ である。外分する点は n を $-n$ に置き換えた $\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$ である。
 - 円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は $(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2$ である。
 - 3 点を通る円は、円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおき、各点の座標を代入して a , b , c を定めます。
- (1) 内分点・外分点の公式に当てはめます。外分は「 n を $-n$ にした内分」と考えると符号のミスを減らせます。2 点 A , B が求まれば、中点は各座標の平均です。

- (2) 直線 l に関して点 A と対称な点 B を求めるには、「 AB が l と垂直である」ことと「 AB の中点が l 上にある」ことの2つの条件を用います。この2条件を $B(a, b)$ についての連立方程式にして解きます。垂直条件は傾きの積が -1 であることから立てます。
- (3) k の値によらず定点を通ることを示すには、与式を k について整理し、 $(\dots) + k(\dots) = 0$ の形にします。この式が k の値によらず成り立つのは、 k を含まない部分と k の係数がともに 0 になるときです。その2式を連立して定点 P の座標が定まります。
- (4) 接点が円周上にあることが分かっているので、上の接線の公式にそのまま当てはめれば求まります。公式を忘れた場合は、接点と中心を結ぶ半径に垂直な直線として求めることもできます。
- (5) 円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおき、3点の座標を代入して得られる3つの式から a, b, c を求めます。最後に平方完成して中心と半径を読み取ります。中心を求めるには、各辺の垂直二等分線の交点を使う方法もあります。
- (6) 積が負になる不等式なので、2つの因数の符号が逆であること、すなわち「一方が正でもう一方が負」または「一方が負でもう一方が正」に場合分けします。 $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ は円、 $x + y + 1 = 0$ は直線を表すので、それぞれが正・負となる領域（円の内部か外部か、直線のどちら側か）を考え、重なりを図示します。境界の不等号に等号がないので、境界線は領域に含まれないことに注意します。

1.4 採点

【第1問 24点】

- (1) 4点
- (2) 4点
- (3) 4点
- (4) 4点
- (5) 4点
- (6) 4点

2 第2問：点と直線の距離

2.1 問題

座標平面上の、点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離 d は、

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられることを示せ。

2.2 解答

点 (x_0, y_0) を P 、直線 $ax + by + c = 0$ を l とおく。 $a = b = 0$ のとき、 l が直線とならないため、 a, b のうち少なくとも一方は 0 でないとして述べる。

- (i) $a = 0$ のとき、直線 l の方程式は $by + c = 0$ すなわち $y = -\frac{c}{b}$ である。このとき点 P との距離は y 座標の差

$$\left| y_0 - \left(-\frac{c}{b} \right) \right| = \left| \frac{by_0 + c}{b} \right| = \frac{|by_0 + c|}{|b|}$$

である。これは、与式 d に $a = 0$ を代入した式

$$\frac{|0 \cdot x_0 + by_0 + c|}{\sqrt{0^2 + b^2}} = \frac{|by_0 + c|}{\sqrt{b^2}} = \frac{|by_0 + c|}{|b|}$$

と等しい。

- (ii) $b = 0$ のとき、直線 l の方程式は $ax + c = 0$ すなわち $x = -\frac{c}{a}$ である。このとき点 P との距離は x 座標の差

$$\left| x_0 - \left(-\frac{c}{a} \right) \right| = \left| \frac{ax_0 + c}{a} \right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}$$

である。これは与式 d に $b = 0$ を代入した式

$$\frac{|ax_0 + 0 \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + 0^2}} = \frac{|ax_0 + c|}{\sqrt{a^2}} = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}$$

と等しい。

- (iii) a, b がともに 0 でない場合を考える。点 P から直線 l に下ろした垂線の足を Q とおく。 $PQ \perp l$ であることと、 $l: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ より l の傾きは $-\frac{a}{b}$ であることから、 PQ の傾き m は

$$m \cdot \left(-\frac{a}{b} \right) = -1$$

を満たすことにより $m = \frac{b}{a}$ であることが分かる。よって、直線 PQ は $P(x_0, y_0)$ を通り傾き $\frac{b}{a}$ であって、その方程式は

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

である。これを整理すると $bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$ となる。直線 PQ と直線 l の交点は点 Q

で、その座標は2直線の式を連立した

$$ax + by + c = 0 \quad (2.1)$$

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0 \quad (2.2)$$

を解けば求められる。 $b \times (2.1) - a \times (2.2)$ より

$$(a^2 + b^2)y + bc + abx_0 - a^2y_0 = 0$$

ゆえ $y = \frac{-bc - abx_0 + a^2y_0}{a^2 + b^2}$, これと (2.1)により $x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$ である。したがって

$$Q \left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2} \right)$$

である。

点 P と直線 l との距離 d は、線分 PQ の長さと等しく、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\left(x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{(a^2 + b^2)x_0 - b^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{(a^2 + b^2)y_0 + abx_0 - a^2y_0 + bc}{a^2 + b^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} (ax_0 + by_0 + c)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

である。これは与式 d と等しい。

以上より、題意は示された。

2.3 解説

点と直線の距離の公式を証明する問題です。公式そのものは

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で、日頃はこれを道具として使いますが、ここではその根拠を確かめます。

証明の方針は、点 P (x_0, y_0) から直線 l に下ろした垂線の足 Q を実際に求め、線分 PQ の長さを計算するというものです。PQ は l と垂直なので、傾きの積が -1 であることから PQ の方程式が立ち、 l との連立で Q の座標が定まります。

つまりきやすいのは、 $l: ax + by + c = 0$ を $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ の形にする際に b で割っている点です。 $b = 0$ のときは傾きが定義できず、この変形ができません。同様に $a = 0$ のときも別扱いが必要です。そこで解答では $a = 0$ のとき、 $b = 0$ のとき、 a も b も 0 でないときの3つに場合分けしています。 $a = 0$ や $b = 0$ のときは直線が座標軸に平行になり、距離は座標の差の絶対値として簡単に求

まります。なお $a = b = 0$ では直線が定まらないので、はじめに a, b の少なくとも一方は 0 でないと断っておきます。

計算の途中では文字が多く煩雑になりますが、最後は $(ax_0 + by_0 + c)^2$ がきれいに括り出されて公式の形に整理されます。根号の中身が 2 乗の形になったら $\sqrt{X^2} = |X|$ を用いて絶対値に直す点も確認してください。

2.4 採点

【第2問 13点】

3 第3問：円と直線

3.1 問題

座標平面上に、円 $C: x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0$ と直線 $\ell: y = 2x + k$ がある。

- (1) C と直線 ℓ が 2 つの交点を持つような k の値の範囲を求めよ。
- (2) k は (1) で求めた範囲にあるとする。 ℓ が C によって切り取られる弦の長さが $\sqrt{2}$ となるとき、 k の値を求めよ。

3.2 解答

C の方程式を変形すると、

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

となるから、円 C の中心は $(-4, 1)$ 、半径は 2 である。また、直線 ℓ は $2x - y + k = 0$ と表される。

- (1) C の中心と ℓ との距離は

$$\frac{|2 \cdot (-4) - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k - 9|}{\sqrt{5}}$$

である。これが円 C の半径より小さいとき、 C と ℓ は異なる 2 つの共有点をもつ。式で表すと

$$\frac{|k - 9|}{\sqrt{5}} < 2$$

であり、これを解いた

$$-2\sqrt{5} + 9 < k < 2\sqrt{5} + 9$$

が求めるべき k の範囲である。

- (2) C から ℓ に下ろした垂線の足は、弦の midpoint になる。よって 1 つの交点と弦の midpoint を結ぶ線分の長さは $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。三平方の定理より、

$$\left(\frac{|k - 9|}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2^2$$

が成り立つ。この式を整理して

$$(k - 9)^2 = \frac{35}{2}$$

を解き

$$k = 9 \pm \frac{\sqrt{70}}{2}$$

が求めるべき k の値である。

3.3 解説

円と直線の位置関係を、点と直線の距離で捉える問題です。

- 円の中心と直線との距離を d 、円の半径を r とすると、 $d < r$ のとき 2 交点、 $d = r$ のとき接する、 $d > r$ のとき共有点なし、となります。
- 弦の長さは、中心から弦に下ろした垂線が弦を二等分することを使い、三平方の定理で求めます。

まず円 C の方程式を平方完成し、中心と半径を読み取っておくのが出発点です。直線 $\ell: y = 2x + k$ は $2x - y + k = 0$ と書き直しておくと、距離の公式に当てはめやすくなります。

- (1) 2 交点を持つ条件は、中心と直線の距離が半径より小さいこと、すなわち $d < r$ です。距離の公式で d を k の式で表し、 $d < 2$ を解きます。絶対値を含む不等式になるので、展開して k の範囲を求めます。
- (2) 中心から弦へ下ろした垂線の足が弦の中点になるので、「半径」「中心から直線までの距離 d 」「弦の半分の長さ」が直角三角形をなします。三平方の定理 $d^2 + \left(\frac{\text{弦}}{2}\right)^2 = r^2$ を立てて k を求めます。弦の長さがそのまま $\sqrt{2}$ なので、その半分は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である点に注意します。得られた k が (1) の範囲に入っているかも確認しておくで安心です。

3.4 採点

【第3問 12点】

- (1) 6点
- (2) 6点

4 第4問：2つの円の関係

4.1 問題

k を正の実数とし、座標平面上に、円 $x^2 + y^2 = 4$ と円 $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = k$ を定める。

- (1) 次の条件を満たすときの k の値あるいはとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。
 - (i) 2円が共有点をもたないときの k のとりうる値の範囲。
 - (ii) 片方の円がもう一方の円に内接するときの k の値。
 - (iii) 2円が2個の共有点をもつときの k のとりうる値の範囲。
- (2) k の値が (1) の (iii) で求めた範囲にあるとする。次の条件を満たすときの k の値を求めよ。
 - (a) 2円の2個の共有点を通る直線が、点 $(-3, 4)$ を通る。
 - (b) 2円の2個の共有点と、点 $(-1, -4)$ を通る半径 $2\sqrt{5}$ の円が存在する。

4.2 解答

円 $C: x^2 + y^2 = 4$ の中心は $(0, 0)$ 、半径は $r_1 = 2$ 、円 $D: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = k$ の中心は $(5, 2)$ 、半径は $r_2 = \sqrt{k}$ である。この2円の中心間の距離 d は $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ である。

- (1) D の中心は C の外側にあるため、 D が C に内接することはない。
 - (i) 2円が共有点を持たないのは、 $r_1 + r_2 < d$ または $r_2 - r_1 > d$ のときである。それぞれ具体的に表すと

$$2 + \sqrt{k} < \sqrt{29} \tag{4.1}$$

または

$$\sqrt{k} - 2 > \sqrt{29} \tag{4.2}$$

である。 $k > 0$ のもとで、

$$\begin{aligned} (4.1) \quad &\iff \sqrt{k} < \sqrt{29} - 2 \\ &\iff k < (\sqrt{29} - 2)^2 \\ &\iff k < 33 - 4\sqrt{29} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} (4.2) \quad &\iff \sqrt{k} > \sqrt{29} + 2 \\ &\iff k > (\sqrt{29} + 2)^2 \\ &\iff k > 33 + 4\sqrt{29} \end{aligned}$$

であるから、求めるべき k の値の範囲は

$$k < 33 - 4\sqrt{29} \quad \text{または} \quad k > 33 + 4\sqrt{29}$$

である。

- (ii) C が D に内接する場合を考えればよい。このとき、 $r_2 - r_1 = d$ である。(i) と同様に計算すると、

$$k = 33 + 4\sqrt{29}$$

である。これが求めるべき k の値である。

- (iii) 2 共有点をもつ場合は $r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$ である。(i) と同様に計算すると、

$$33 - 4\sqrt{29} < k < 33 + 4\sqrt{29}$$

であり、これが求めるべき k の値の範囲である。

- (2) C と D の方程式を式変形して $C: x^2 + y^2 - 4 = 0$, $D: x^2 + y^2 - 10x - 4y + 29 - k = 0$ とできる。 C と D の共有点を全て通る直線あるいは円のうち、 D と異なる図形 E の方程式は、実数 a を用いて

$$x^2 + y^2 - 4 + a(x^2 + y^2 - 10x - 4y + 29 - k) = 0$$

と表すことができる。

- (a) E が直線するとき、 $x^2 + y^2$ の項が消えるために、 $a = -1$ でなければならない。そのとき、 E の方程式は

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 - 10x - 4y + 29 - k) = 0$$

で、これを整理して

$$10x + 4y - 33 + k = 0$$

となる。これが点 $(-3, 4)$ を通るとき、代入した

$$10 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 - 33 + k = 0$$

を解いて $k = 47$ を得る。この値は (1) の (iii) の範囲 $33 - 4\sqrt{29} < k < 33 + 4\sqrt{29}$ (約 $11.46 < k < 54.54$) に含まれるから、 C と D は 2 共有点をもつ。よって、これが求めるべき k の値である。

- (b) E が円のときを考えるため、 $a \neq -1$ とする。 E の方程式を x, y について平方完成し

$$(a+1)\left(x - \frac{5a}{a+1}\right)^2 + (a+1)\left(y - \frac{2a}{a+1}\right)^2 = ak - 29a + 4 + \frac{29a^2}{a+1}$$

さらに両辺を $a+1$ で割り、

$$\left(x - \frac{5a}{a+1}\right)^2 + \left(y - \frac{2a}{a+1}\right)^2 = \frac{1}{a+1} \left(ak - 29a + 4 + \frac{29a^2}{a+1}\right)$$

である。この半径が $2\sqrt{5}$ であるから、

$$\frac{1}{a+1} \left(ak - 29a + 4 + \frac{29a^2}{a+1}\right) = (2\sqrt{5})^2 \quad (4.3)$$

が成り立つ。また、点 $(-1, -4)$ を通ることより、

$$(-1)^2 + (-4)^2 - 4 + a((-1)^2 + (-4)^2 - 10 \cdot (-1) - 4 \cdot (-4) + 29 - k) = 0$$

が成り立つ。整理すると

$$ak = 72a + 13 \quad (4.4)$$

となるから、このもとで

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad &\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} \left(72a + 13 - 29a + 4 + \frac{29a^2}{a+1} \right) = 20 \\
 &\Leftrightarrow 43a + 17 + \frac{29a^2}{a+1} = 20(a+1) \\
 &\Leftrightarrow 52a^2 + 20a - 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2a+1)(26a-3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad a = \frac{3}{26}
 \end{aligned}$$

である。(4.4)より、

$$k = 72 + \frac{13}{a} = \begin{cases} 72 - 26 = 46 & \left(a = -\frac{1}{2} \right) \\ 72 + \frac{13 \cdot 26}{3} & \left(a = \frac{3}{26} \right) \end{cases}$$

である。このうち、(1)の(iii)の範囲に含まれるのは $k = 46$ のときのみである。よって、これが求めるべき k の値である。

4.3 解説

2円の位置関係を、中心間の距離 d と2つの半径 r_1, r_2 の大小で分類する問題です。

- $d > r_1 + r_2$ のとき互いに外部にあって共有点なし、 $d = r_1 + r_2$ のとき外接します。
- $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$ のとき2個の共有点を持ちます。
- $d = |r_1 - r_2|$ のとき内接し、 $d < |r_1 - r_2|$ のとき一方が他方の内部にあって共有点なしです。

はじめに2円の中心と半径、そして中心間の距離 $d = \sqrt{29}$ を求めておきます。ここでは D の中心が C の外側にあるので、 C が D に内接する (C が D の内部に入る) 場合だけを考えればよい点に注意します。

(1) 上の分類を $r_2 = \sqrt{k}$ として不等式に直します。

- 共有点を持たないのは $r_1 + r_2 < d$ または $r_2 - r_1 > d$ のときです。根号を含む不等式は、両辺とも正であることを確認してから2乗すると k の範囲が得られます。
- 内接は $r_2 - r_1 = d$ のときです。(i)の不等号を等号にした式を解きます。
- 2個の共有点を持つのは $r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$ のときで、(i)(ii)の結果の「間」になります。

(2) 2円の共有点を通る図形は、2円の方程式を $f = 0, g = 0$ として $f + ag = 0$ (a は実数) と表せます。これは共有点でつねに成り立つ図形の一群を表す考え方で、束(そく)と呼ばれます。

- 共有点を通る直線がほしいので、 $x^2 + y^2$ の項が消える $a = -1$ を選びます。得られた直線が点 $(-3, 4)$ を通る条件から k が定まります。
- 共有点を通る円がほしいので $a \neq -1$ とし、方程式を平方完成して半径を a と k で表します。半径が $2\sqrt{5}$ である条件と、点 $(-1, -4)$ を通る条件の2式から a と k を求めます。最後に、得られた k が(1)の(iii)で求めた「2個の共有点を持つ」範囲に入っているかを

確かめ，条件を満たすものだけを答えとします。範囲外の解を除く点に要注意です。

4.4 採点

【第4問 14点】

- (1) (i) 2点
- (ii) 2点
- (iii) 2点
- (2) (a) 4点
- (b) 4点

5 第5問：軌跡

5.1 問題

座標平面上を動く点の軌跡について考える。以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 2点 $A(4, 1)$, $B(-3, 0)$ を定める。点 C が, $AC : BC = 3 : 2$ を満たすように動くとき, C の軌跡を求めよ。
- (2) 2点 $P(3, 0)$, $Q(-2, 0)$ を定める。放物線 $y = x^2$ 上の1点 R が, これら3点が一直線上にないように動くとき, $\triangle PQR$ の重心 G の軌跡を求めよ。

5.2 解答

- (1) $C(X, Y)$ とおく。 $AC : BC = 3 : 2$ すなわち $2AC = 3BC$ を両辺2乗して $4AC^2 = 9BC^2$ とする。これを X, Y を用いて表すと

$$4\{(4-X)^2 + (1-Y)^2\} = 9\{(-3-X)^2 + (0-Y)^2\} \quad (5.1)$$

であり, 整理して

$$\begin{aligned} (5.1) \quad &\Longleftrightarrow 5X^2 + 5Y^2 + 86X + 8Y + 13 = 0 \\ &\Longleftrightarrow 5\left(X + \frac{43}{5}\right)^2 + 5\left(Y + \frac{4}{5}\right)^2 = 360 \\ &\Longleftrightarrow \left(X + \frac{43}{5}\right)^2 + \left(Y + \frac{4}{5}\right)^2 = 72 \end{aligned}$$

よって点 C の x 座標 X と y 座標 Y の間に上の関係式が成り立つ。これは, 点 $C(X, Y)$ が方程式

$$\left(x + \frac{43}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{5}\right)^2 = 72$$

で表される図形の上を動くことを表す。よって点 C の軌跡は中心 $\left(-\frac{43}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, 半径 $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ の円である。

- (2) 点 R の座標は, 実数 t を用いて $R(t, t^2)$ とおける。 $t = 0$ のとき, $R(0, 0)$ となり3点が一直線上にあるため, $t \neq 0$ として考える。このとき, $\triangle PQR$ の重心 G の座標は

$$G\left(\frac{3-2+t}{3}, \frac{0+0+t^2}{3}\right)$$

と表される。 G の x 座標を X , y 座標を Y とすると,

$$X = \frac{3-2+t}{3} = \frac{1+t}{3} \quad (5.2)$$

$$Y = \frac{0+0+t^2}{3} = \frac{t^2}{3} \quad (5.3)$$

となり, これから t を消去して X と Y の関係式を求める。(5.2)より

$$t = 3X - 1$$

が得られ、これを (5.3) に代入すると、

$$Y = \frac{(3X - 1)^2}{3}$$

すなわち

$$Y = 3 \left(X - \frac{1}{3} \right)^2$$

である。また、 $t = 0$ の場合は除くため、

$$X = \frac{3 - 2 + 0}{3} = \frac{1}{3}, \quad Y = \frac{0^2}{3} = 0$$

である点 $\left(\frac{1}{3}, 0 \right)$ は除く。

よって、点 G の軌跡は

$$y = 3 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2$$

で表される放物線の、点 $\left(\frac{1}{3}, 0 \right)$ を除く部分である。

5.3 解説

軌跡を求める問題です。軌跡の求め方の基本は次の通りです。

- 動く点の座標を (X, Y) とおく。
 - 条件を X, Y の関係式に翻訳する。媒介変数があるときはそれを消去する。
 - 得られた関係式が表す図形が軌跡である。ただし、条件から除くべき点がないかを確認する。
- (1) 求める点を $C(X, Y)$ とおきます。 $AC : BC = 3 : 2$ はそのままでは根号を含んで扱いにくいので、 $2AC = 3BC$ と書き直し、両辺を 2 乗して $4AC^2 = 9BC^2$ とします。距離の 2 乗を X, Y で表して整理し、平方完成すると円の方程式になります。このように、2 定点からの距離の比が一定である点の軌跡は円（アポロニウスの円）になります。
- (2) 放物線上の点 R を媒介変数 t を使って $R(t, t^2)$ とおくのがポイントです。重心 G の座標 (X, Y) を t で表し、そこから t を消去して X と Y の関係式を作ります。 X の式から t を X で表し、 Y の式へ代入すると放物線の方程式が得られます。注意すべきは除外点です。3 点が一直線上にあると三角形ができないため、そうなる $t = 0$ を除きます。このとき G がとる 1 点を軌跡から除く必要があり、答えは「放物線から 1 点を除いた部分」となります。軌跡の問題では、このように条件から除かれる点がないかを最後に必ず確かめてください。

5.4 採点

【第 5 問 18 点】

- (1) 9 点
(2) 9 点

6 第6問：領域と式の値

6.1 問題

実数 x, y が, 不等式

$$y \leq 2x + 3, \quad 2y \geq x + 1, \quad x + 3y \leq 7$$

をすべて満たしているとする。

- (1) 上の不等式を満たす x, y について, 点 (x, y) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
- (2) 上の不等式を満たす x, y について, $x + y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) 上の不等式を満たす x, y について, $x^2 + 6x + y^2 - 2y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) 上の不等式を満たす x, y について, $\frac{y+5}{x+5}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

6.2 解答

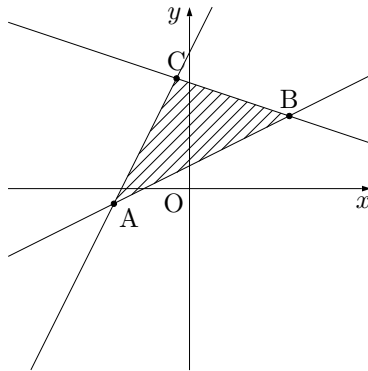


図 6.1: 不等式の表す領域

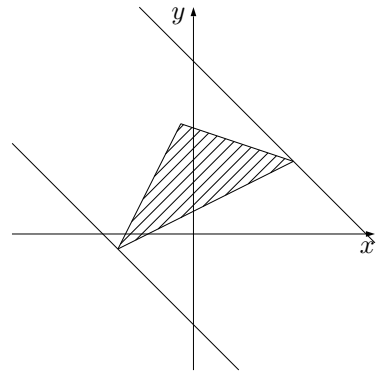


図 6.2: 不等式と $y = -x + k$

(1)

$$l: 2x - y + 3 = 0$$

$$m: x - 2y + 1 = 0$$

$$n: x + 3y - 7 = 0$$

とする。3 式のうち 2 式を選び, 方程式を連立して交点を求めると, l と m の交点は $A\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, m と n の交点は $B\left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right)$, n と l の交点は $C\left(-\frac{2}{7}, \frac{17}{7}\right)$ である。不等式を満たす領域 D は, 与えられた不等式の不等号の向きを考え, l の下側, m の上側, n の下側であるから, この 3 点を結ぶ三角形の周および内部である。

- (2) $x + y = k$ とおく。座標平面上で, (1) で求めた領域 D と, 直線 $L: x + y = k$ すなわち $y = -x + k$ が共有点をもつような実数 k の範囲が, 求めるべきものである。 L の傾きは -1 である。一方, 領域 D の 3 辺のうち, 辺 AB は m (傾き $\frac{1}{2}$), 辺 BC は n (傾き $-\frac{1}{3}$), 辺 CA は l (傾き 2) 上にあり,

$$(L \text{ の傾き}) = -1 < -\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 2$$

であるから、 L の傾きは D のどの辺の傾きよりも小さい。このため L を平行移動させて D と共有点をもたせるとき、 L は D のいずれの辺とも平行にならず、最も右上にある頂点で切片 k が最大、最も左下にある頂点で k が最小となる。3 頂点の座標を比べると、最も右上にあるのは B 、最も左下にあるのは A であるから、図 6.2 のように L が点 B を通るときに切片 k は最大、点 A を通るときに k は最小となる。よって k の最大値 $\max k$ は

$$\max k = \frac{11}{5} + \frac{8}{5} = \frac{19}{5}$$

最小値 $\min k$ は

$$\min k = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -2$$

である。 $-2 < k < \frac{19}{5}$ のとき、 L は図 6.2 の 2 直線の間であり、 D と共有点をもつから、この範囲の値はすべて k のとりうる値である。以上より、 k のとりうる値の範囲は

$$-2 \leq k \leq \frac{19}{5}$$

である。

- (3) $x^2 + 6x + y^2 - 2y = k$ とおき、この方程式、すなわち

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = k+10$$

と領域 D が共有点をもつ k の条件を考える。この方程式は中心 $P(-3, 1)$ 、半径 $r = \sqrt{k+10}$ の円であり、この円と D が共有点をもつとき、 P との距離が半径と等しくなる D 内の点があればよい。 P との距離が最も小さくなる D 内の点は、 P から l に下ろした垂線の足 $Q\left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ であり、この点は辺 CA 上にあるから D に属する。 PQ の長さは P と l との距離で

$$PQ^2 = \left(\frac{|2 \cdot (-3) - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right)^2 = \frac{16}{5}$$

である。また、 D 内で P との距離が最も大きい点は B である。

$$PB^2 = \left(\frac{11}{5} - (-3) \right)^2 + \left(\frac{8}{5} - 1 \right)^2 = \frac{137}{5}$$

半径がこの値の間にある、すなわち $PQ \leq r \leq PB$ であれば、この円は D と共有点をもつ。この不等式を平方した

$$PQ^2 \leq r^2 \leq PB^2$$

を k の式で表し、

$$\frac{16}{5} \leq k+10 \leq \frac{137}{5}$$

ゆえ

$$-\frac{34}{5} \leq k \leq \frac{87}{5}$$

であり、これが求めるべき式の値の範囲である。

- (4) $\frac{y+5}{x+5} = k$ とおく。 $y+5 = k(x+5)$ より、この方程式が表す図形は $(-5, -5)$ を通り、傾きが k である直線である。この直線が D との共有点をもつなかで、傾き k が最も大きいのは

点 C を通る場合、最も小さいのは点 B を通る場合で、それぞれ座標を方程式に代入すると、

$$k = \frac{\frac{8}{5} + 5}{-\frac{11}{5} + 5} = \frac{11}{12} \quad (\text{B を通るとき})$$

$$k = \frac{\frac{17}{7} + 5}{-\frac{2}{7} + 5} = \frac{52}{33} \quad (\text{C を通るとき})$$

である。 k がこの間の値をとるときは D と直線が共有点をもつ。よって与式のとりうる値の範囲は

$$\frac{11}{12} \leq k \leq \frac{52}{33}$$

である。

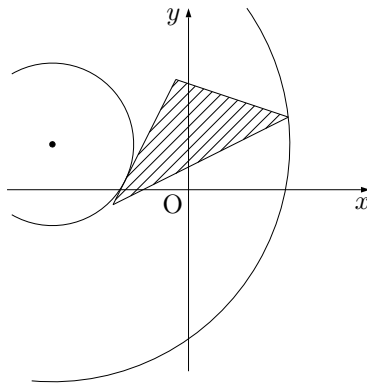


図 6.3: 領域と円

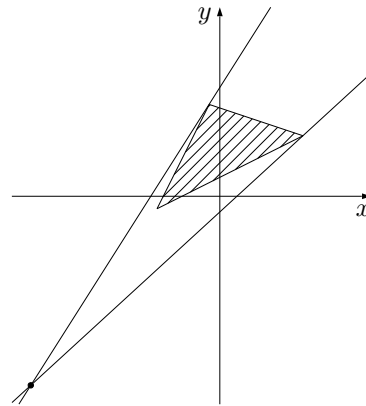


図 6.4: 領域と直線

6.3 解説

連立不等式が表す領域上で、与えられた式のとりうる値の範囲を求める問題です。「式 = k 」とおき、その式が表す図形が領域と共有点をもつような k の範囲を考える、というのが共通の方針になります。式の形によって次のように図形が変わります。

- $x + y = k$ のような 1 次式は直線を表す。傾きは一定で、切片にあたる k を動かす。
- $x^2 + \dots + y^2 + \dots = k$ のような式は、平方完成すると円を表す。中心は固定で、半径が k で変わる。
- $\frac{y-b}{x-a} = k$ は、定点 (a, b) を通り傾き k の直線を表す。

いずれも、領域と図形が接する・端の点を通る場合が最大最小を与えるので、まず領域の頂点を押さえておくことが出発点です。

- (1) 3 つの不等式の境界はいずれも直線なので、2 直線ずつ連立して交点を求め、三角形の 3 頂点 A, B, C を定めます。あとは各不等式の不等号の向きから、それぞれの直線の上側・下側のどちらかを判断し、共通部分を三角形の周および内部として図示します。境界を含むかどうか（不等号に等号があるか）も確認しておきましょう。

- (2) $x + y = k$ は傾き -1 の直線です。この直線を平行移動させ、領域と共有点をもつ範囲で切片 k が最大・最小になる位置を探します。直線の傾きと領域の辺の傾きの大きさを比べると、どの頂点を通るときに k が最大・最小になるかが分かります。ここでは頂点 B で最大、頂点 A で最小になります。
- (3) 与式を k とおいて平方完成すると、中心 $P(-3, 1)$ 、半径 $\sqrt{k+10}$ の円が現れます。この円が領域と共有点をもつのは、領域内の点と P との距離が半径に一致するときです。したがって、領域内で P に最も近い点と最も遠い点を調べればよく、最も近いのは P から辺 CA へ下ろした垂線の足（点と直線の距離。垂線の足が実際に辺上にあることの確認も必要です）、最も遠いのは頂点 B です。距離の 2 乗で不等式を立てると k の範囲が求まります。
- (4) 与式を k とおくと $y + 5 = k(x + 5)$ となり、定点 $(-5, -5)$ を通り傾き k の直線を表します。この直線を定点のまわりに回転させ、領域と共有点をもつ範囲で傾き k が最大・最小になる位置を探します。ここでは頂点 C を通るとき最大、頂点 B を通るとき最小となり、それぞれ座標を代入して k の値を求めます。

6.4 採点

【第6問 19点】

- (1) 4点
(2) 5点
(3) 5点
(4) 5点