

# 確 認 試 験 問 題

## 複素数と方程式

(配点 100 点)

(日付)                      年              月              日

(開始) 

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

 : 

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

      ~ (90 分) ~      

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

 : 

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

 (終了)

### 注 意 事 項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 5 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 4 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 4 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

## 第 1 問

(配点 20)

$i$  を虚数単位とする。以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1)  $\frac{1+3i}{1+2i} + \frac{1+3i}{3+4i}$  を計算せよ。
- (2)  $(2+i)x + y + 8 = (1+i)(2-i)$  を満たす実数  $x, y$  を求めよ。
- (3) 2 乗すると  $-i$  となる複素数  $z$  をすべて求めよ。
- (4)  $x$  についての方程式  $3x^2 - 8x + 13 = 0$  を、複素数の範囲で解け。
- (5) 多項式  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 25x - 12$  について、 $P\left(\frac{1}{2}\right)$  を求め、 $P(x)$  を複素数の範囲で因数分解せよ。

## 第 2 問

(配点 25)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 2 次方程式  $x^2 - 2x + 3 = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とするとき,  $\frac{\beta+2}{\alpha-1} + \frac{\alpha+2}{\beta-1}$  の値を求めよ。
- (2) 2 次方程式  $x^2 + 3x + 7 = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とするとき,  $\alpha^2, \beta^2$  を解に持つような, 実数係数の 2 次方程式を 1 つ挙げよ。
- (3) 2 次方程式  $4x^2 - ax + 38 = 0$  の 2 つの解のうち, 片方の解がもう一方の解の 2 倍になるような実数  $a$  の値と, 方程式の解を求めよ。
- (4)  $a, b, c, d$  を実数とする。ただし,  $a \neq 0$  である。3 次方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  の解が  $\alpha, \beta, \gamma$  で表されるとき, 次の 3 つの値を  $a, b, c, d$  を用いて表せ。

$$\alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad \alpha\beta\gamma$$

- (5) 3 次方程式  $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$  の解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき, 次の 2 つの値を求めよ。

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

### 第 3 問

(配点 28)

$i$  を虚数単位とする。以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 3 次方程式  $x^3 + ax + b = 0$  の解の 1 つが  $x = -1 + 4i$  であるとき、実数の定数  $a$ ,  $b$  の値と、他の解を求めよ。
- (2)  $x^{47} - 1$  を  $x^2 + 1$  で割ったときの余りを求めよ。
- (3) 整式  $P(x)$  を  $(x-1)(x-2)$  で割ったときの余りは  $5x+1$ ,  $x-3$  で割ったときの余りは 18 である。このとき、 $P(x)$  を  $(x-1)(x-2)(x-3)$  で割った余りを求めよ。
- (4) 実数  $x$  についての方程式

$$(x^4 - 15x^2 + 10x + 24)(x^3 - 15x^2 + 62x - 48) = 0$$

を解け。

## 第 4 問

(配点 27)

$n$  乗して 1 になる数, すなわち  $x^n = 1$  を満たす数  $x$  を, 1 の  $n$  乗根という。

- (1) 1 の 3 乗根のうち, 虚数であるものの 1 つを  $\omega$  とおく。このとき, 次の式の値を求めよ。

$$(\omega^{10} + 1)^{10} + (\omega^5 + 1)^5 + 1$$

- (2)  $P(x)$  を次のように定める。

$$P(x) = (x^{10} + 1)^{10} + (x^5 + 1)^5 + 1$$

$P(x)$  を  $x^2 + x + 1$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $R(x)$  として,

$$P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + R(x)$$

で表す。 $R(x)$  は 1 次以下の式である。実数  $a, b$  を用いて  $R(x) = ax + b$  と表されるとき,  $a, b$  の値を求めよ。

- (3) 1 の 4 乗根を, 複素数の範囲内で全て求めよ。

- (4) 次の等式を満たす式  $Z(x)$  を求めよ。

$$x^5 - 1 = (x - 1)Z(x)$$

- (5) 1 の 5 乗根は, 1 つが実数で, 残りの 4 つが虚数である。1 の 5 乗根のうち虚数であるものの 1 つを  $\psi$  とおくとき, 次の式の値を求めよ。

$$(\psi^3 + \psi^2 + \psi + 1)^4 + (\psi^7 + 1)^2 + \psi^7(\psi^6 - 1)$$

- (6) 1 の 3 乗根は, 1 の 6 乗根でもあることを示せ。

- (7) 1 の 7 乗根のうち, 虚数であるもののどの値  $\tau$  を選んでも,  $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4, \tau^5, \tau^6$  は虚数かつ相異なる 1 の 7 乗根であることが分かっている。また, 整式  $S(x) = x^7 - 1$  は

$$S(x) = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

と因数分解できる。これらと,  $S(\alpha) = 0$  を満たす  $\alpha$  に対して  $S(x)$  は  $x - \alpha$  を因数に持つことを用い, 次の式の値を求めよ。

$$(1 - \tau)(1 - \tau^2)(1 - \tau^3)(1 - \tau^4)(1 - \tau^5)(1 - \tau^6)$$