

確 認 試 験 問 題

複素数と方程式

(配点 100 点)

(日付) 年 月 日

(開始)

--	--	--	--	--

 ~ (90 分) ~

--	--	--	--	--

 (終了)

注 意 事 項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 14 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 4 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 4 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

計 算 用 紙

第 1 問

(配点 20)

i を虚数単位とする。以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $\frac{1+3i}{1+2i} + \frac{1+3i}{3+4i}$ を計算せよ。
- (2) $(2+i)x + y + 8 = (1+i)(2-i)$ を満たす実数 x, y を求めよ。
- (3) 2 乗すると $-i$ となる複素数 z をすべて求めよ。
- (4) x についての方程式 $3x^2 - 8x + 13 = 0$ を、複素数の範囲で解け。
- (5) 多項式 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 25x - 12$ について、 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ を求め、 $P(x)$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

計 算 用 紙

第 2 問

(配点 25)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の解を α, β とするとき, $\frac{\beta+2}{\alpha-1} + \frac{\alpha+2}{\beta-1}$ の値を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $x^2 + 3x + 7 = 0$ の解を α, β とするとき, α^2, β^2 を解に持つような, 実数係数の 2 次方程式を 1 つ挙げよ。
- (3) 2 次方程式 $4x^2 - ax + 38 = 0$ の 2 つの解のうち, 片方の解がもう一方の解の 2 倍になるような実数 a の値と, 方程式の解を求めよ。
- (4) a, b, c, d を実数とする。ただし, $a \neq 0$ である。3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解が α, β, γ で表されるとき, 次の 3 つの値を a, b, c, d を用いて表せ。

$$\alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad \alpha\beta\gamma$$

- (5) 3 次方程式 $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$ の解を α, β, γ とするとき, 次の 2 つの値を求めよ。

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

計 算 用 紙

第 3 問

(配点 28)

i を虚数単位とする。以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 3 次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の解の 1 つが $x = -1 + 4i$ であるとき、実数の定数 a , b の値と、他の解を求めよ。
- (2) $x^{47} - 1$ を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (3) 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $5x+1$, $x-3$ で割ったときの余りは 18 である。このとき、 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りを求めよ。
- (4) 実数 x についての方程式

$$(x^4 - 15x^2 + 10x + 24)(x^3 - 15x^2 + 62x - 48) = 0$$

を解け。

計 算 用 紙

第 4 問

(配点 27)

n 乗して 1 になる数, すなわち $x^n = 1$ を満たす数 x を, 1 の n 乗根という。

- (1) 1 の 3 乗根のうち, 虚数であるものの 1 つを ω とおく。このとき, 次の式の値を求めよ。

$$(\omega^{10} + 1)^{10} + (\omega^5 + 1)^5 + 1$$

- (2) $P(x)$ を次のように定める。

$$P(x) = (x^{10} + 1)^{10} + (x^5 + 1)^5 + 1$$

$P(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ として,

$$P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + R(x)$$

で表す。 $R(x)$ は 1 次以下の式である。実数 a, b を用いて $R(x) = ax + b$ と表されるとき, a, b の値を求めよ。

- (3) 1 の 4 乗根を, 複素数の範囲内で全て求めよ。

- (4) 次の等式を満たす式 $Z(x)$ を求めよ。

$$x^5 - 1 = (x - 1)Z(x)$$

- (5) 1 の 5 乗根は, 1 つが実数で, 残りの 4 つが虚数である。1 の 5 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ψ とおくとき, 次の式の値を求めよ。

$$(\psi^3 + \psi^2 + \psi + 1)^4 + (\psi^7 + 1)^2 + \psi^7(\psi^6 - 1)$$

- (6) 1 の 3 乗根は, 1 の 6 乗根でもあることを示せ。

- (7) 1 の 7 乗根のうち, 虚数であるもののどの値 τ を選んでも, $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4, \tau^5, \tau^6$ は虚数かつ相異なる 1 の 7 乗根であることが分かっている。また, 整式 $S(x) = x^7 - 1$ は

$$S(x) = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

と因数分解できる。これらと, $S(\alpha) = 0$ を満たす α に対して $S(x)$ は $x - \alpha$ を因数に持つことを用い, 次の式の値を求めよ。

$$(1 - \tau)(1 - \tau^2)(1 - \tau^3)(1 - \tau^4)(1 - \tau^5)(1 - \tau^6)$$

計 算 用 紙

計 算 用 紙

計 算 用 紙

