
確 認 試 験 問 題

複素数と方程式

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 4 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：複素数の計算

1.1 問題

i を虚数単位とする。以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $\frac{1+3i}{1+2i} + \frac{1+3i}{3+4i}$ を計算せよ。
- (2) $(2+i)x + y + 8 = (1+i)(2-i)$ を満たす実数 x, y を求めよ。
- (3) 2乗すると $-i$ となる複素数 z をすべて求めよ。
- (4) x についての方程式 $3x^2 - 8x + 13 = 0$ を、複素数の範囲で解け。
- (5) 多項式 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 25x - 12$ について、 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ を求め、 $P(x)$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

1.2 解答

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1+3i}{1+2i} + \frac{1+3i}{3+4i} &= \frac{(1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} + \frac{(1+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{1-2i+3i-6i^2}{1-4i^2} + \frac{3-4i+9i-12i^2}{9-16i^2} \\ &= \frac{7+i}{5} + \frac{15+5i}{25} \\ &= 2 + \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

(2) 与式の両辺をそれぞれ整理すると次の通り。

$$(2+i)x + y + 8 = 2x + y + 8 + xi$$

$$(1+i)(2-i) = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$$

これらが等しくなる x, y の条件は、実部と虚部がそれぞれ等しければ良く、

$$\begin{cases} 2x + y + 8 = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

を解いて

$$x = 1, \quad y = -7$$

より、これが求めるべき値である。

(3) 実数 a, b を用いて求めるべき複素数 z を $z = a + bi$ で表す。このとき、 $z^2 = -i$ は

$$(a + bi)^2 = -i$$

すなわち

$$a^2 + 2abi + b^2i^2 = -i$$

さらに整理して

$$(a^2 - b^2) + 2abi = -i$$

が成り立つ。各辺の実部と虚部を比較すると

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -1 \end{cases}$$

となる。1 式目は $(a + b)(a - b) = 0$ より $a = \pm b$ である。

(ア) $a = b$ のとき, $2ab = 2a^2 = -1$ を満たす実数 a は存在しない。

(イ) $a = -b$ のとき, $2ab = -1$ にこれを代入し, $-2a^2 = -1$ すなわち $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

これと $a = -b$ より,

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

が条件を満たす。

以上より, $z^2 = -i$ となるような z は

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

である。

(4) 2 次方程式の解の公式を用いると,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 3 \cdot 13}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{23}i}{3}$$

であり, これが方程式の解である。

(5)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 12 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{25}{2} - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから, $P(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ を因数に持つ。 $P(x)$ の最高次の係数が 2 であることを考えて, この式を 2 倍した $2x - 1$ を因数に持つとしてもよい。 $P(x)$ を $2x - 1$ で割り, その商との積の形で $P(x)$ を表すと

$$P(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 12)$$

となる。ところで, $x^2 - x + 12 = 0$ の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{47}i}{2}$ であるから,

$$P(x) = (2x - 1) \left(x - \frac{1 + \sqrt{47}i}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{47}i}{2}\right)$$

と因数分解できる。

1.3 解説

- (1) 虚数に関する基本的な計算です。 $i^2 = -1$ に注意することと、分母に共役な、つまり虚数部分の符号が反転している複素数を掛け算することで、虚数部分が消えることを活用しましょう。
- (2) 実数 a, b, c, d において、 $a + bi = c + di$ のとき、 $a = c, b = d$ が成り立ちます。実数部分と虚数部分を比較して解きましょう。
- (3) 2つの実数を設定して $z = a + bi$ の形にすると、計算で求められます。
- (4) 解の公式の、1次の係数が偶数の場合、 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ であることが使えます。
- (5) $P(a) = 0$ のとき、 $P(x)$ は $x - a$ で割り切れることを用いるために、 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ を計算させています。

1.4 採点

【第1問 20点】

過程によっては部分点を与える。

- (1) 4点
- (2) 4点
- (3) 4点
 - 分母は有理化してもしなくてもよい。有理化しない場合、

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

である。

- (4) 3点
- (5) 5点

2 第2問：解と係数の関係

2.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 2次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の解を α, β とするとき、 $\frac{\beta+2}{\alpha-1} + \frac{\alpha+2}{\beta-1}$ の値を求めよ。
- (2) 2次方程式 $x^2 + 3x + 7 = 0$ の解を α, β とするとき、 α^2, β^2 を解に持つような、実数係数の2次方程式を1つ挙げよ。
- (3) 2次方程式 $4x^2 - ax + 38 = 0$ の2つの解のうち、片方の解がもう一方の解の2倍になるような実数 a の値と、方程式の解を求めよ。
- (4) a, b, c, d を実数とする。ただし、 $a \neq 0$ である。3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解が α, β, γ で表されるとき、次の3つの値を a, b, c, d を用いて表せ。
 $\alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad \alpha\beta\gamma$
- (5) 3次方程式 $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$ の解を α, β, γ とするとき、次の2つの値を求めよ。
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

2.2 解答

- (1) 解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$ が成り立つ。これより与式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta+2}{\alpha-1} + \frac{\alpha+2}{\beta-1} &= \frac{(\beta+2)(\beta-1) + (\alpha+2)(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \\
 &= \frac{\beta^2 + \beta - 2 + \alpha^2 + \alpha - 2}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\
 &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha + \beta) - 4}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\
 &= \frac{2^2 - 2 \cdot 3 + 2 - 4}{3 - 2 + 1} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

となる。

- (2) 解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 7$ である。 α^2, β^2 を解に持つ2次方程式の1つは、
 解と係数の関係より

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0 \tag{2.1}$$

と表すことができる。

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-3)^2 - 2 \cdot 7 = -5$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 7^2 = 49$$

より、(2.1)に代入して

$$x^2 + 5x + 49 = 0$$

を得る。これは題意を満たす2次方程式の1つである。

- (3) 与えられた2次方程式の解の1つを k とおき、2つの解を $k, 2k$ と表すことができる。解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} k + 2k &= \frac{a}{4} \quad \wedge \quad k \cdot 2k = \frac{38}{4} \\ \iff a &= 12k \quad \wedge \quad k = \pm \frac{\sqrt{19}}{2} \end{aligned}$$

よって、求めるべき a と解 $k, 2k$ は、

$$(a, k, 2k) = \left(6\sqrt{19}, \frac{\sqrt{19}}{2}, \sqrt{19} \right) \quad \vee \quad (a, k, 2k) = \left(-6\sqrt{19}, -\frac{\sqrt{19}}{2}, -\sqrt{19} \right)$$

である。

- (4) 3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が α, β, γ を解に持つとき、

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

というように表される。この両辺を整理し、

$$a \left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right) = a \{ x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma \}$$

この係数を比較すると、

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

である。

- (5) (4) より、 $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = -3$ である。

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= 1^2 - 2 \cdot 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

また、 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$ であるから、

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= 1 \cdot (-3 - 2) + 3 \cdot (-3) \\ &= -14 \end{aligned}$$

を得る。

2.3 解説

- (1) 解と係数の関係で得られるものは $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ ですが、求めたい式は α と β の対称式なので、これらで表すことができます。
- (2) 与えられた2次方程式と、求めたい2次方程式に関して、解と係数の関係を合計2回使います。
- (3) 解を $k, 2k$ と1つの文字を使って表せれば、解と係数の関係で求めたいものは全て求められます。
- (4) 2次方程式の解と係数の関係は、 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が $x = \alpha, x = \beta$ のとき、

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できることから導かれています。これを3次方程式でも同じように考えれば、3次方程式の解と係数の関係が導出できます。

- (5) (4) で得た3次方程式の解と係数の関係を用いて式を計算します。式の変形に気をつけましょう。

2.4 採点

【第2問 25点】

- (1) 5点
- (2) 5点
- (3) 5点
- (4) 5点
- (5) 5点

3 第3問：剰余の定理と高次方程式

3.1 問題

i を虚数単位とする。以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 3 次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の解の 1 つが $x = -1 + 4i$ であるとき、実数の定数 a, b の値と、他の解を求めよ。
- (2) $x^{47} - 1$ を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (3) 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $5x+1$, $x-3$ で割ったときの余りは 18 である。このとき、 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りを求めよ。
- (4) 実数 x についての方程式

$$(x^4 - 15x^2 + 10x + 24)(x^3 - 15x^2 + 62x - 48) = 0$$

を解け。

3.2 解答

- (1) 方程式に $x = -1 + 4i$ を代入して、

$$(-1 + 4i)^3 + a(-1 + 4i) + b = 0$$

$$\iff -1 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot 4i + 3 \cdot (-1) \cdot (4i)^2 + (4i)^3 - a + 4ai + b = 0$$

$$\iff (-a + b + 47) + (4a - 52)i = 0$$

となる。 a, b は実数であるから、実数部分と虚数部分を比較すると、 $a = 13, b = -34$ を得る。ゆえに、元の方程式は

$$x^3 + 13x - 34 = 0$$

と表される。また、 $x = -1 + 4i$ と同値な $x + 1 = 4i$ の両辺を 2 乗して

$$(x+1)^2 = (4i)^2 \iff x^2 + 2x + 17 = 0$$

が得られる。 $x^3 + 13x - 34$ を $x^2 + 2x + 17$ で割ると、

$$x^3 + 13x - 34 = (x^2 + 2x + 17)(x - 2)$$

であるから、 $x^3 + 13x - 34 = 0$ の解は、

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -1 + 4i \quad \vee \quad x = -1 - 4i$$

である。

- (2) $x^{47} - 1$ を $x^2 + 1$ で割った商を $Q(x)$, 余りは 1 次以下の式のため $ax + b$ (ただし a, b は実数) とすると、

$$x^{47} - 1 = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$$

と表される。これに $x = i$ を代入すると

$$i^{47} - 1 = (i^2 + 1)Q(i) + ai + b$$

$$\therefore -i - 1 = ai + b$$

が得られる。実数部分と虚数部分を比較して $a = -1$, $b = -1$ より, 求めるべき余りは $-x - 1$ である。

- (3) $P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りは 2 次以下の式であるため $ax^2 + bx + c$ とおくと,

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

である。これに $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ を代入すると,

$$P(1) = a + b + c, \quad P(2) = 4a + 2b + c, \quad P(3) = 9a + 3b + c \quad (3.1)$$

となる。また, $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った商を $Q_1(x)$, $x-3$ で割った商を $Q_2(x)$ とすると,

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x) + 5x + 1$$

$$P(x) = (x-3)Q_2(x) + 18$$

と表される。 $x = 1$, $x = 2$ を前者に, $x = 3$ を後者に代入すると

$$P(1) = 6, \quad P(2) = 11, \quad P(3) = 18$$

であるため, (3.1)と比較して

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 11 \\ 9a + 3b + c = 18 \end{cases}$$

となる。これを解くと $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ であるため, 求めるべき余りは $x^2 + 2x + 3$ である。

- (4)

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = P(x), \quad x^3 - 15x^2 + 62x - 48 = Q(x)$$

とおく。 $P(-1) = P(2) = 0$ と $Q(1) = 0$ であるから, $P(x)$ は $(x+1)(x-2)$ で, $Q(x)$ は $(x-1)$ で割り切れる。割り算を実行すると,

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 + x - 12) = (x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$$

$$Q(x) = (x-1)(x^2 - 14x + 48) = (x-1)(x-6)(x-8)$$

となる。解くべき方程式は

$$P(x)Q(x) = 0$$

であるから, この解は

$$x = -4 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = 6 \quad \vee \quad x = 8$$

である。

3.3 解説

高次方程式や整式の割り算では, 剰余の定理と因数定理がよく使われます。

- 剰余の定理: 整式 $P(x)$ を $x - a$ で割ったときの余りは $P(a)$ である。
- 因数定理: $P(a) = 0$ のとき, $P(x)$ は $x - a$ で割り切れる ($x - a$ を因数に持つ)。

また、整式 $P(x)$ を割る式 $D(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $R(x)$ とすると、

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

と表せて、 $R(x)$ の次数は $D(x)$ の次数より小さくなります。余りを未知の係数においてから、都合の良い値を代入していくのが定石です。

- (1) 実数係数の方程式が虚数解 $x = -1 + 4i$ を持つとき、共役な複素数 $x = -1 - 4i$ も解になります。解答では $x = -1 + 4i$ を代入して実部と虚部を比較し、 a, b を定めています。他の解は、 $x = -1 + 4i$ から作った $x^2 + 2x + 17 = 0$ で元の3次式を割ることで求められます。共役解が解になることを使えば、残り1つの実数解は解と係数の関係から素早く求めることもできます。
- (2) $x^2 + 1$ で割った余りは1次以下なので $ax + b$ とおきます。 $x^2 + 1 = 0$ の解が $x = i$ であることに着目し、 $x = i$ を代入すると割る式の項が消えて余りだけが残ります。 i^{47} は $i^2 = -1$ を繰り返し使って計算し、実部と虚部を比較して a, b を求めます。 47 を 4 で割った余りに注目すると $i^{47} = i^{44} \cdot i^3 = -i$ と手早く求められます。
- (3) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ で割った余りは2次以下なので $ax^2 + bx + c$ とおきます。 $x = 1, 2, 3$ を代入すると割る式が消え、 $P(1), P(2), P(3)$ の値がそれぞれ得られます。これらの値は、与えられた「 $(x - 1)(x - 2)$ で割った余りが $5x + 1$ 」「 $x - 3$ で割った余りが 18 」という条件から求められます。得られた3つの等式を連立して a, b, c を決定します。
- (4) 2つの整式の積が0になる方程式なので、それぞれの整式が0になる場合を考えます。各整式は、簡単な整数を代入して0になるものを見つけ、因数定理で因数を1つずつ取り出して因数分解します。 $\pm 1, \pm 2$ のような小さな整数から代入して探すとよいです。最終的な解は、2つの整式から得られる解を全て合わせたものになります。

3.4 採点

【第3問 28点】

- (1) 7点
- (2) 6点
- (3) 8点
- (4) 7点

4 第4問：1の n 乗根

4.1 問題

n 乗して 1 になる数, すなわち $x^n = 1$ を満たす数 x を, 1 の n 乗根という。

- (1) 1 の 3 乗根のうち, 虚数であるものの 1 つを ω とおく。このとき, 次の式の値を求めよ。

$$(\omega^{10} + 1)^{10} + (\omega^5 + 1)^5 + 1$$

- (2) $P(x)$ を次のように定める。

$$P(x) = (x^{10} + 1)^{10} + (x^5 + 1)^5 + 1$$

$P(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ として,

$$P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + R(x)$$

で表す。 $R(x)$ は 1 次以下の式である。実数 a, b を用いて $R(x) = ax + b$ と表されるとき, a, b の値を求めよ。

- (3) 1 の 4 乗根を, 複素数の範囲内で全て求めよ。

- (4) 次の等式を満たす式 $Z(x)$ を求めよ。

$$x^5 - 1 = (x - 1)Z(x)$$

- (5) 1 の 5 乗根は, 1 つが実数で, 残りの 4 つが虚数である。1 の 5 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ψ とおくとき, 次の式の値を求めよ。

$$(\psi^3 + \psi^2 + \psi + 1)^4 + (\psi^7 + 1)^2 + \psi^7(\psi^6 - 1)$$

- (6) 1 の 3 乗根は, 1 の 6 乗根でもあることを示せ。

- (7) 1 の 7 乗根のうち, 虚数であるもののどの値 τ を選んでも, $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4, \tau^5, \tau^6$ は虚数かつ相異なる 1 の 7 乗根であることが分かっている。また, 整式 $S(x) = x^7 - 1$ は

$$S(x) = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

と因数分解できる。これらと, $S(\alpha) = 0$ を満たす α に対して $S(x)$ は $x - \alpha$ を因数に持つことを用い, 次の式の値を求めよ。

$$(1 - \tau)(1 - \tau^2)(1 - \tau^3)(1 - \tau^4)(1 - \tau^5)(1 - \tau^6)$$

4.2 解答

- (1) 1 の 3 乗根 ω は, $\omega^3 = 1$ を満たす。この式を因数分解して $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$ である。 ω が虚数のとき, $\omega \neq 1$ より, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たす。これを用いると,

$$\begin{aligned} (\omega^{10} + 1)^{10} + (\omega^5 + 1)^5 + 1 &= (\omega + 1)^{10} + (\omega^2 + 1)^5 + 1 \\ &= (-\omega^2)^{10} + (-\omega)^5 + 1 \\ &= \omega^{20} - \omega^5 + 1 \\ &= \omega^2 - \omega^2 + 1 \end{aligned}$$

$$= 1$$

となるから、求めるべき値は1である。

- (2) (1) より、 $P(\omega) = 1$ である。また、 $P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + R(x)$ に $x = \omega$ を代入して

$$\begin{aligned} P(\omega) &= (\omega^2 + \omega + 1)Q(\omega) + R(\omega) \\ &= 0 \cdot Q(\omega) + a\omega + b \\ &= a\omega + b \end{aligned}$$

を得る。従って、 $a\omega + b = 1$ であるが、 ω は虚数であるため、 $a = 0$ でなければならない。このとき、 $b = 1$ である。これらが求めるべき値である。

- (3) $x^4 = 1$ を整理すると、

$$x^4 - 1 = 0 \iff (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \iff (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$x^2 + 1 = 0$ の解は $\pm i$ であるから、最初の方程式の解、すなわち1の4乗根は $\pm 1, \pm i$ である。

- (4) $x^5 - 1$ を $x - 1$ で割ると、商は $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 、余りは0となる。よって

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

と因数分解できるが、 $x^5 - 1 = (x - 1)Z(x)$ であるので、これらを比較して

$$Z(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

を得る。

- (5) $\psi^5 = 1$ すなわち $\psi^5 - 1 = 0$ である。また、(4) より

$$\psi^5 - 1 = (\psi - 1)(\psi^4 + \psi^3 + \psi^2 + \psi + 1)$$

である。 $\psi \neq 1$ より、 ψ は $\psi^4 + \psi^3 + \psi^2 + \psi + 1 = 0$ を満たす。これと $\psi^5 = 1$ を用いて与式を計算すると、

$$\begin{aligned} (\psi^3 + \psi^2 + \psi + 1)^4 + (\psi^7 + 1)^2 + \psi^7(\psi^6 - 1) &= (-\psi^4)^4 + (\psi^2 + 1)^2 + \psi^2(\psi - 1) \\ &= \psi^{16} + \psi^4 + 2\psi^2 + 1 + \psi^3 - \psi^2 \\ &= \psi + \psi^4 + \psi^2 + 1 + \psi^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

- (6) 1の3乗根 ω は、 $\omega^3 = 1$ を満たす。

$$\omega^6 = (\omega^3)^2 = 1^2 = 1$$

より $\omega^6 = 1$ を得るから、 ω は1の6乗根である。

- (7) $x^7 = 1$ すなわち $x^7 - 1 = 0$ の解は、1, τ , τ^2 , τ^3 , τ^4 , τ^5 , τ^6 であるから、

$$S(x) = (x - 1)(x - \tau)(x - \tau^2)(x - \tau^3)(x - \tau^4)(x - \tau^5)(x - \tau^6)$$

と因数分解できる。これと与えられた式を比較して、

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - \tau)(x - \tau^2)(x - \tau^3)(x - \tau^4)(x - \tau^5)(x - \tau^6)$$

である。これに $x = 1$ を代入すると

$$(1 - \tau)(1 - \tau^2)(1 - \tau^3)(1 - \tau^4)(1 - \tau^5)(1 - \tau^6) = 1^6 + 1^5 + 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 7$$

となる。従って、求めるべき値は7である。

4.3 解説

1のn乗根、すなわち $x^n = 1$ を満たす x を扱う問題です。共通して使うのは、 $x^n - 1$ の因数分解

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

です。1以外のn乗根 α は $\alpha \neq 1$ なので $\alpha - 1 \neq 0$ であり、右側の因数

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0$$

を満たします。この関係式と $\alpha^n = 1$ を使って、高い次数の項を低い次数に置き換えていくのが基本方針です。

- (1) 1の虚数の3乗根 ω は $\omega^3 = 1$ かつ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たします。この2つを使って与式の指数を下げていきます。 $\omega^{10} = \omega^9 \cdot \omega = \omega$ のように、 $\omega^3 = 1$ で指数を3ずつ減らすのがコツです。 $\omega + 1 = -\omega^2$, $\omega^2 + 1 = -\omega$ という置き換えも $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ から得られます。
- (2) (1)の結果がそのまま使えます。 $P(x)$ の x に ω を代入すると、割る式 $x^2 + x + 1$ の部分が $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より消えて $P(\omega) = a\omega + b$ となり、これが(1)で求めた値に等しくなります。 ω が虚数であることから、実部と虚部を比較する要領で a , b が定まります。 $a\omega + b$ が実数になるには $a = 0$ でなければならない点に注意します。
- (3) $x^4 - 1$ を因数分解して解きます。 $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ と変形でき、 $x^2 + 1 = 0$ の解が $\pm i$ であることから、1の4乗根は ± 1 , $\pm i$ の4つと分かります。
- (4) 冒頭で挙げた $x^n - 1$ の因数分解の公式を $n = 5$ に適用するだけです。 $x^5 - 1$ を実際に $x - 1$ で割ると、商が $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で余りが0になることを確かめられます。この $Z(x)$ は後の(5)で使います。
- (5) (4)で得た因数分解を利用します。1の虚数の5乗根 ψ は $\psi^5 = 1$ かつ $\psi^4 + \psi^3 + \psi^2 + \psi + 1 = 0$ を満たします。この2式を使って、与式の各項の指数を $\psi^5 = 1$ で下げ、 $\psi^3 + \psi^2 + \psi + 1 = -\psi^4$ などの置き換えを行うと、最終的に $\psi^4 + \psi^3 + \psi^2 + \psi + 1$ の形が現れて0になります。
- (6) 1の3乗根 ω が1の6乗根でもあること、すなわち $\omega^6 = 1$ を示す問題です。 $\omega^3 = 1$ の両辺を2乗すれば $\omega^6 = (\omega^3)^2 = 1$ が直ちに得られます。指数法則を使うだけの短い証明です。
- (7) 1の7乗根を因数分解の観点から捉える問題です。 $x^7 - 1 = (x - 1)(x - \tau)(x - \tau^2) \cdots (x - \tau^6)$ と $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)$ を比べると、共通の因数 $x - 1$ を除いて

$$(x - \tau)(x - \tau^2) \cdots (x - \tau^6) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
 という恒等式が得られます。求めたい積は左辺に $x = 1$ を代入した形なので、右辺に $x = 1$ を代入して値7を得ます。恒等式なので x に何を代入してもよい、という点が要点です。

4.4 採点

【第4問 27点】

- (1) 4点

- (2) 4 点
- (3) 4 点
- (4) 3 点
- (5) 4 点
- (6) 3 点
- (7) 5 点